Листок 15. Симметрические многочлены.

16 января 2020

9 ”В” класс

1 По кругу выложены черные и белые шары, причем черных в два раза больше, чем белых. Известно, что среди пар соседних шаров одноцветных пар втрое больше, чем разноцветных. Какое наименьшее число шаров могло быть выложено?

Многочлен от двух переменных x и y называется **симметрическим**, *если он не изменяется при замене x на y, а y на x.*

2 Выразите через симметрические многочлены $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$ степенные суммы $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$.

3 Докажите по индукции, что каждая степенная сумма $x^n + y^n$ может быть представлена в виде многочлена от σ_1 и σ_2.

4 Докажите, что любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от σ_1 и σ_2.

5 Решите системы уравнений:

a $\begin{cases} x^4 + y^4 = 34, \\ x + y = 2; \end{cases}$ b $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

Многочлен от нескольких переменных, не изменяющийся при любых перестановках своих переменных, называется **симметрическим**.

Многочлены

$$\begin{aligned} &\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ &\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\ &\ldots \\ &\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 \ldots x_n. \end{aligned}$$

называются **элементарными симметрическими**.

6 Выразите через элементарные симметрические многочлены

a $(x + y)(y + z)(x + z)$, b $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$,

c $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(x^2 + z^2)$, d $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

7 Известно, что $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдите $a^4 + b^4 + c^4$.

8 a Пусть x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$. Чему равны значения выражений $x_1 + x_2 + x_3, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad x_1x_2x_3$?

b Известно, что многочлен $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ имеет три корня x_1, x_2, x_3. Сформулируйте и докажите для x_1, x_2, x_3 теорему Виета.

9 Числа x, y, z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно a.

10 Найдите все значения параметра a, для каждого из которых многочлен $x^3 - 6x^2 + ax + a$ имеет три корня x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие равенству

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0.$$

11 Постройте кубический многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

12 Известно, что многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три корня x_1, x_2, x_3. Найдите многочлен третьей степени, корнями которого являются числа $y_1 = x_2x_3, \quad y_2 = x_1x_3, \quad y_3 = x_1x_2$.

13 Решите уравнения: a $\sqrt[3]{8 + x} + \sqrt[3]{8 - x} = 1$,

b $x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9$,

c $x \cdot \dfrac{19 - x}{x + 1} \cdot \left(x + \dfrac{19 - x}{x + 1}\right) = 84$.

<u>Подсказка к первому:</u> введите новые переменные $u = \sqrt[3]{8 + x}$, $v = \sqrt[3]{8 - x}$ *и решите сначала систему уравнений* $\begin{cases} u + v = 1, \\ u^3 + v^3 = 16. \end{cases}$