Листок 14. Интерполяция

29 января 2022

9 “В” класс

1 Какое минимальное количество квадратов 2×2 можно вырезать (по линиям сетки) из квадрата 11×11 так, чтобы в оставшуюся часть нельзя было (по линиям сетки) вписать квадрат 2×2?

2 Докажите, что если в записи $(x^2 - x + 1)^{1543}$ раскрыть скобки и привести подобные, то какой-нибудь коэффициент полученного выражения будет отрицательным.

3 a) Постройте многочлен P первой степени такой, что $P(0) = 1$, $P(3) = 4$.

b) Постройте многочлен P второй степени такой, что
$P(1) = 1$, $P(3) = 13$, $P(5) = 36$.

c) Постройте многочлен P третьей степени такой, что
$P(1) = 1$, $P(3) = 4$, $P(5) = 10$, $P(7) = 27$.

Построение многочлена P степени не выше n и такого, что $P(x_i) = y_i$, где $i = 0, 1, \ldots, n$ называется **интерполяцией**. *Соответствующий многочлен P называется* **интерполяционным многочленом**.

4 Докажите, что интерполяционный многочлен единственный.

5 Решите уравнения (a, b, c — различные числа):

a) $a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x$,

b) $a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

6 a) Постройте многочлен P который в точках $x_1, \ldots x_n$ равен нулю, а в остальных точках отличен от нуля.

b) Постройте многочлен P степень которого 2, и который в точке x_0 принимает значение 1, а в точках x_1 и x_2 равен 0.

c) Постройте многочлен P степени ниже n который в точке x_0 принимает значение 1, а в точках $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ равен нулю.

d) Постройте многочлен P степени n который в точке x_0 принимает значение y_0, а в точках $x_1, x_2 \ldots x_n$ равен нулю.

e) Постройте многочлен P степени n который в точке x_1 принимает значение y_1, а во всех точках $x_0, x_2, \ldots x_n$ равен нулю.

f) Постройте многочлен P степени *не выше* n который в точке x_0 принимает значение y_0, в точке x_1 принимает значение y_1, а в точках $x_2, \ldots x_n$ равен нулю.

g) Постройте многочлен P степени *не выше* n такой, что $P(x_i) = y_i$, где $i = 0, 1, \ldots, n$ а x_i, y_i — любые вещественные числа.

Интерполяционный многочлен в виде

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$$

называется **интерполяционным многочленом Лагранжа***.*

Интерполяционный многочлен в виде

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

называется **интерполяционным многочленом Ньютона***.*

$\boxed{7}$ Докажите, что для любых точек $x_0, x_1, \ldots x_n$ и значений $y_0, y_1, \ldots y_n$ существует интерполяционный многочлен Ньютона. *Указание: воспользуйтесь методом математической индукции.*

$\boxed{8}$ Верно ли, что любые три точки на плоскости с различными абсциссами лежат на одной параболе?

$\boxed{9}$ Найдите многочлен степени не выше трех такой что
$P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 4$, $P(3) = 8$

$\boxed{a}$ при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа;

$\boxed{b}$ при помощи интерполяционного многочлена Ньютона.

$\boxed{10}$ $\boxed{a}$ Рассмотрим многочлен $x^p - x$ как многочлен над полем F^p — полем всех остатков по простому модулю p. Разложите его на линейные множители.

$\boxed{b}$ Приравняйте коэффициенты при x в этом многочлене и в его разложении. Что вы получили?

$\boxed{11}$ Про граф известно что в любом его подграфе найдется вершина степени не более k. Докажите, что его можно правильно раскрасить в $k+1$ цвет.

$\boxed{12}$ Найдите многочлен наименьшей степени, который при делении на $(x-1)$ дает остаток 1, при делении на $(x-2)$ дает остаток 3, при делении на $(x-4)$ остаток 5, при делении на $(x-5)$ остаток 7.

Многочлен называется **целозначным** *если он принимает целые значения в целых точках.*

$\boxed{13}$ $\boxed{a}$ Верно ли, что у любого целозначного многочлена все коэффициенты целые?

$\boxed{b}$ Докажите, что любой целозначный многочлен можно представить в виде суммы многочленов $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$, $\ldots$, $P_n(x) = \frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!}$, $\ldots$ с целыми коэффициентами.

$\boxed{c}$ Докажите, что всякий многочлен степени n принимающий целые значения в каких-то $n+1$ последовательных целых точках является целозначным.