Листок 13. Целые, рациональные, иррациональные...

15 января 2022

9 “В” класс

1 a Найдите многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

b Выясните, является ли это число рациональным или иррациональным.

2 Выясните, рациональны ли следующие числа:

a $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+2\sqrt{6}$,

b $\sqrt[n]{k}$, где целое k не является n-й степенью целого числа,

c $\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}$,

d $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

3 Рассмотрим для многочлена $f(x)$ последовательность $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... его значений в целых положительных точках. Составим последовательность разностей ее соседних членов: $f(1)-f(2)$, $f(2)-f(3)$, $f(3)-f(4)$, ... Сделаем то же самое со второй последовательностью, т.е. составим последовательность разностей ее соседних членов, и т.д. Докажите, что на каком-то шаге полученная последовательность будет состоять из одних нулей. (*Указание: подумайте, что можно сказать о степени многочлена* $f(x)-f(x+1)$.)

4 Кубическое и квадратное уравнения с рациональными коэффициентами имеют общий корень. Докажите, что у кубического уравнения есть рациональный корень.

5 Многочлен f седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ± 1. Докажите, что не существует многочленов g_1 и g_2 ненулевой степени с целыми коэффициентами таких, что $f=g_1g_2$.

6 Леонард Эйлер обнаружил, что значения многочлена $P(x)=x^2+x+41$ в точках $0,1,\ldots,39$ — простые числа. А существует ли многочлен не нулевой степени с целыми коэффициентами, у которого значения при любых целых x были бы простыми числами?

7 Решите сравнения:

a $x^2\equiv 4 \pmod{33}$; b $x^2-3x\equiv 4 \pmod{51}$.

8 Какое наибольшее количество чисел можно выписать в ряд так, чтобы сумма любых пяти, стоящих рядом была положительной, а сумма любых восьми — отрицательной?

Листок 13. Целые, рациональные, иррациональные...
15 января 2022
9 "В" класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\text{a}}$ Найдите многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

$\boxed{\text{b}}$ Выясните, является ли это число рациональным или иррациональным.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Выясните, рациональны ли следующие числа:

$\boxed{\text{a}}$ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+2\sqrt{6}$,

$\boxed{\text{b}}$ $\sqrt[n]{k}$, где целое k не является n-й степенью целого числа,

$\boxed{\text{c}}$ $\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}$,

$\boxed{\text{d}}$ $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Рассмотрим для многочлена $f(x)$ последовательность $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$ его значений в целых положительных точках. Составим последовательность разностей ее соседних членов: $f(1)-f(2)$, $f(2)-f(3)$, $f(3)-f(4)$, $\ldots$ Сделаем то же самое со второй последовательностью, т.е. составим последовательность разностей ее соседних членов, и т.д. Докажите, что на каком-то шаге полученная последовательность будет состоять из одних нулей. (*Указание: подумайте, что можно сказать о степени многочлена* $f(x)-f(x+1)$.)

$\boxed{\mathbf{4}}$ Кубическое и квадратное уравнения с рациональными коэффициентами имеют общий корень. Докажите, что у кубического уравнения есть рациональный корень.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Многочлен f седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ± 1. Докажите, что не существует многочленов g_1 и g_2 ненулевой степени с целыми коэффициентами таких, что $f=g_1 g_2$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Леонард Эйлер обнаружил, что значения многочлена $P(x)=x^2+x+41$ в точках $0, 1, \ldots, 39$ — простые числа. А существует ли многочлен не нулевой степени с целыми коэффициентами, у которого значения при любых целых x были бы простыми числами?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Решите сравнения:

$\boxed{\text{a}}$ $x^2 \equiv 4 \pmod{33}$; $\boxed{\text{b}}$ $x^2-3x \equiv 4 \pmod{51}$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Какое наибольшее количество чисел можно выписать в ряд так, чтобы сумма любых пяти, стоящих рядом была положительной, а сумма любых восьми — отрицательной?