

## Листок 12. Знакомство с многочленами

6 января 2022

9 “В” класс

**1** (база) На доске были написаны числа  $4, 14, 24, \dots, 104$ . Дима сказал, что он стёр сначала одно число, потом два, потом три, потом четыре, и всякий раз после очередного стирания сумма оставшихся чисел делилась на 11. Не ошибается ли Дима?

**2** Найдите НОД двух многочленов  $f$  и  $g$ , если

**a** (база)  $f = x^3 + x - 2, g = x^3 + x^2 - x - 1,$

**b** (обяз)  $f = x^3 + 4x^2 + 7x + 4, g = x^3 + 5x^2 + 10x + 8,$

**c** (обяз)  $f = x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 6, g = x^4 + 6x^2 + 3x + 10$  (Указание: воспользуйтесь алгоритмом Евклида).

**3** **a** (обяз) Докажите, что для любых ненулевых многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  существуют многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$ , такие что  $uf + vg = (f, g)$ .

**b** (обяз) Найдите  $u$  и  $v$  для многочленов  $P(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^2 - 3x - 1$  и  $Q(x) = 2x^3 - x^2 + x + 1$ .

**4** (база) С помощью теоремы Безу найдите остаток от деления многочлена  $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$  на  $x - 1$ .

**5** **a** (продв) Многочлен  $P(x)$  дает при делении на  $(x - 1)$  остаток 2, а при делении на  $(x - 2)$  остаток 1. Найти остаток от деления  $P(x)$  на  $x^2 - 3x + 2$ .

**b** (продв) Многочлен  $P(x)$  дает при делении на  $(x + 1)$  остаток 15, а при делении на  $(x - 1)$  остаток 43. Найти остаток от деления  $P(x)$  на  $x^2 - 1$ .

**6** **a** (база) Докажите, что если многочлен  $P(x)$  делится на  $(x - 1)$ , то сумма его коэффициентов равна нулю.

**b** (обяз) Найдите сумму всех коэффициентов многочлена  $Q(x) = (2x^3 - 2x^2 + 1)^{43}$ .

**c** (продв) Найдите сумму всех коэффициентов  $Q(x)$  при нечетной степени переменной.

**d** (обяз) Найдите сумму всех коэффициентов многочлена  $(1 + 2x - 4x^2)^{248}(1 - 7x + 5x^2)^{345}$ .

**e** (обяз) Про многочлен  $P(x)$  с целыми коэффициентами известно, что он делится на  $x^3 - 4x + 13$ . На какую цифру оканчивается сумма всех его коэффициентов?

**7** (обяз) Есть ли общие корни у многочленов  $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$  и  $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 4$ ?

**8** (олимп) Два пятизначных числа приписали одно к другому. Оказалось, что получившееся десятизначное число делится на произведение исходных пятизначных чисел. Найдите исходные числа.

**9** (продв) Решите уравнение:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1.$$

**10** (олимп) Маша и Настя играют в игру, ставя по очереди фишки в клетки доски  $5 \times 5$ : Маша — белые фишки (она начинает), а Настя — чёрные. Каждая фишка ставится на свободную клетку. Нельзя ставить фишку на клетку, у которой фишками твоего цвета заняты все соседние по стороне клетки. Проигрывает тот, кто не имеет хода. Кто победит при наилучшей игре?

**11** (база) Решите уравнение  $x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 22x - 12 = 0$ .

**12** (продв) Найдите все многочлены  $f(x)$ , такие что  $2f(2x) = f(3x) + f(x)$  для всех  $x$ . (Указание: найдите старший коэффициент этого многочлена.)

**13** (продв) Найдите все многочлены  $f(x)$ , такие что  $f(x^2) = f^2(x)$  для всех  $x$ .

**14** (олимп) По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

**15** (обяз) Найдите все натуральные  $n$ , при которых число  $n^3 + 2n^2 + 4n + 3$  делится на число  $n^2 + 1$ .

**16** (продв) Существует ли многочлен  $f$  степени 1000 такой, что  $f(x^2 + 4x + 2)$  делится на  $f(x)$ ?

**17** (продв) Приведенный квадратный трехчлен  $f(x)$  имеет 2 различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение  $f(f(x)) = 0$  имеет 3 различных корня, а уравнение  $f(f(f(x))) = 0$  имеет 7 различных корней?

**18** (продв) Многочлен с целыми коэффициентами в трех целых точках принимает значения 2. Может ли он принимать в какой-то целой точке значение 3?

**19** (олимп) По кругу стоят 10 стаканов дном вниз. Артур может перевернуть любые четыре рядом стоящих стакана, либо выбрать один стакан и перевернуть два стакана слева и два стакана справа от него. Удастся ли Артуру такими действиями перевернуть вверх дном все стаканы?