

Листок 10. Свойства чисел Фибоначчи

9 класс “В”

4 декабря 2021 г.

Рассмотрим последовательность чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Характеристическое свойство этих чисел: каждое следующее число равно сумме двух предыдущих: $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}$.

1 Сколько существует n -значных чисел, составленных из цифр 2 и 5, в которых никакие две двойки не стоят рядом?

2 Сколькими способами можно расположить первые n натуральных чисел в строку, чтобы никакое число не отличалось от номера занимаемого места больше, чем на 1?

3 **a** Рассмотрим полосу из k клеток. Сколько существует способов пройти из левой клетки полосы в правую, если каждым ходом разрешено переходить в соседнюю справа клетку или перепрыгивать через одну клетку?

b Выведите из предыдущего пункта, что $\varphi_{m+n} = \varphi_m \varphi_{n-1} + \varphi_{m+1} \varphi_n$.

4 Докажите, что $(\varphi_m, \varphi_n) = \varphi_{(m,n)}$.

5 Докажите, что для любого натурального m среди первых $m^2 - 1$ чисел Фибоначчи хотя бы одно число делится на m .

6 Докажите, что частное φ_{2n}/φ_n нечетно, если φ_n нечетно. Частное четно, но не делится на 4, если φ_n делится на 4. Наконец, φ_{2n}/φ_n делится на 4, если φ_n четно, но не делится на 4.

7 **a** Докажите, что $\varphi_{kn} \div \varphi_n$.

b Докажите, что $\varphi_{\text{НОК}[m_1, m_2]} \div \text{НОК}[m_1, m_2]$, если $\varphi_{m_1} \div m_1$, $\varphi_{m_2} \div m_2$.

8 Докажите, что $\varphi_{3 \cdot 2^k}$ делится на $3 \cdot 2^{k+2}$.

9 Докажите, что $\varphi_{kn-1} \equiv \varphi_{n-1}^k \pmod{\varphi_n^2}$.

10 Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что если φ_n делится на p , то φ_{pn} делится на $p\varphi_n$.

11 Докажите формулу Бине:

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

12 Докажите, что φ_{5^n} делится на 5^n .

- 13** Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что одно из чисел φ_{p-1} или φ_{p+1} делится на p .
- 14** Докажите, что $\varphi_{4 \cdot 3^n}$ делится на $4 \cdot 3^n$.
- 15** Докажите, что для любого натурального числа n найдется такое натуральное число m , что m делится на n , а φ_m делится на m .