

Листок 10. Подобия

4 декабря 2021

9 “В” класс

1 Сто жителей страны рыцарей и лжецов собрались вместе, и каждый сказал, сколько среди присутствующих лжецов. Никто не назвал число больше ста. Какова максимально возможная сумма названных ими чисел?

2 Даны четыре точки A, B, A', B' . Докажите, что существуют ровно два подобия, переводящих A в A' , а B в B' .

3 Докажите, что гомотетия является подобием.

4 Даны четыре точки A, B, A', B' . Прямые AA' и BB' пересекаются в точке P , а описанные окружности треугольников ABP и $A'B'P$ вторично пересекаются в точке Q . Докажите, что треугольники QAB и $QA'B'$ подобны.

Теорема 1. Любое подобие, сохраняющее ориентацию, с коэффициентом k , отличным от 1, является композицией гомотетии с центром в некоторой точке O и коэффициентом k и поворотом вокруг O (иногда такое преобразование называется **спиральным подобием**).

5 На отрезках AA' и BB' взяли точки P, Q соответственно так, что $AP : PA' = BQ : QB' = AB : A'B'$. Докажите, что прямая PQ образует равные углы с AB и $A'B'$.

Теорема 2. Любое подобие с коэффициентом, не равным 1, меняющее ориентацию, можно представить в виде композиции гомотетии с центром в некоторой точке O и симметрии относительно прямой, проходящей через O .

6 Прямоугольный лист бумаги разделен на N прямоугольников линиями, параллельными сторонам листа. Докажите, что Ева может, вооружившись канцелярским ножом, разрезать лист на эти прямоугольники, сделав не более $N - 1$ прямолинейных разрезов. (Разрез не обязан начинаться или заканчиваться на краю листа. Перекладывать части нельзя).

7 Найдите композицию двух гомотетий с разными центрами.

8 На одной стороне листа начерчена карта Москвы, а на другой в более крупном масштабе карта центра. Можно ли проколоть лист так, чтобы на обеих сторонах точка прокола отображала одну и ту же точку города?

9 Докажите, что в произвольном треугольнике ABC центр тяжести M , ортоцентр H и центр описанной окружности O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем M расположена между O и H и $MH = 2 \cdot OM$.

10 Даны окружность и точки A, B на ней. Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников ABC , где C — произвольная точка окружности.

11 Маша задумала число, сложила его куб и его квадрат и сообщила результат Ване. Умный Ваня не смог однозначно определить загаданное число. Какое самое большое число могла задумать Маша?

Листок 10. Подобия

4 декабря 2021

9 “В” класс

1 Сто жителей страны рыцарей и лжецов собрались вместе, и каждый сказал, сколько среди присутствующих лжецов. Никто не назвал число больше ста. Какова максимально возможная сумма названных ими чисел?

2 Даны четыре точки A, B, A', B' . Докажите, что существуют ровно два подобия, переводящих A в A' , а B в B' .

3 Докажите, что гомотетия является подобием.

4 Даны четыре точки A, B, A', B' . Прямые AA' и BB' пересекаются в точке P , а описанные окружности треугольников ABP и $A'B'P$ вторично пересекаются в точке Q . Докажите, что треугольники QAB и $QA'B'$ подобны.

Теорема 1. Любое подобие, сохраняющее ориентацию, с коэффициентом k , отличным от 1, является композицией гомотетии с центром в некоторой точке O и коэффициентом k и поворотом вокруг O (иногда такое преобразование называется **спиральным подобием**).

5 На отрезках AA' и BB' взяли точки P, Q соответственно так, что $AP : PA' = BQ : QB' = AB : A'B'$. Докажите, что прямая PQ образует равные углы с AB и $A'B'$.

Теорема 2. Докажите, что любое подобие с коэффициентом, не равным 1, меняющее ориентацию, можно представить в виде композиции гомотетии с центром в некоторой точке O и симметрии относительно прямой, проходящей через O .

6 Прямоугольный лист бумаги разделен на N прямоугольников линиями, параллельными сторонам листа. Докажите, что Ева может, вооружившись канцелярским ножом, разрезать лист на эти прямоугольники, сделав не более $N - 1$ прямолинейных разрезов. (Разрез не обязан начинаться или заканчиваться на краю листа. Перекладывать части нельзя).

7 Найдите композицию двух гомотетий с разными центрами.

8 На одной стороне листа начерчена карта Москвы, а на другой в более крупном масштабе карта центра. Можно ли проколоть лист так, чтобы на обеих сторонах точка прокола отображала одну и ту же точку города?

9 Докажите, что в произвольном треугольнике ABC центр тяжести M , ортоцентр H и центр описанной окружности O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем M расположена между O и H и $MH = 2 \cdot OM$.

10 Даны окружность и точки A, B на ней. Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников ABC , где C — произвольная точка окружности.

11 Маша задумала число, сложила его куб и его квадрат и сообщила результат Ване. Умный Ваня не смог однозначно определить загаданное число. Какое самое большое число могла задумать Маша?