

## Листок 8. Движения—2

21 ноября 2021

9 “В” класс

- 1** Первый член последовательности равен 1. Чтобы получить каждый следующий член последовательности, перемножают все предыдущие и прибавляют 4. Докажите, что все члены этой последовательности, кроме одного — точные квадраты.
- 2** В треугольнике  $ABC$ , все углы которого меньше  $\frac{2\pi}{3}$ , найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.
- 3** Докажите, что среди всех четырехугольников с заданными диагоналями и углом между ними наименьший периметр имеет параллелограмм.
- 4** На сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  данного остроугольного треугольника  $ABC$  найдите такие точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , чтобы периметр треугольника  $A'B'C'$  был наименьшим.
- 5** Натуральное число называется *хорошим*, если оно является произведением различных простых чисел и при этом делится на каждое из этих простых чисел, уменьшенное на единицу. Найдите все хорошие числа.
- 6** (**Лемма о двух гвоздях.**) Докажите, что для любых двух пар точек  $A$ ,  $B$  и  $A'$ ,  $B'$ , таких что  $AB = A'B' > 0$ , существуют ровно два движения, переводящие  $A$  в  $A'$ , а  $B$  в  $B'$ , одно из которых сохраняет ориентацию, а другое меняет.
- 7** Даны два равных треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$ . Докажите, что существует ровно одно движение, переводящее первый треугольник во второй.
- 8** Докажите, что каждое движение можно представить как композицию не более, чем трех симметрий.
- 9** Найдите композицию симметрий относительно прямых  $a$  и  $b$ , пересекающихся в точке  $O$ .
- 10** Найдите композицию симметрий относительно двух параллельных прямых.
- 11** Найдите остатки от деления:  
а)  $19^{10}$  на 66;      б)  $19^{14}$  на 70;      в)  $17^9$  на 48;      г)  $14^{14^{14}}$  на 100.
- 12** Вершины дерева правильно закрашены в синий и зелёный цвета, причем все листья — зелёные. Докажите, что зелёных вершин больше, чем синих.

## Листок 8. Движения–2

21 ноября 2021

9 “В” класс

- 1] Первый член последовательности равен 1. Чтобы получить каждый следующий член последовательности, перемножают все предыдущие и прибавляют 4. Докажите, что все члены этой последовательности, кроме одного — точные квадраты.
- 2] В треугольнике  $ABC$ , все углы которого меньше  $\frac{2\pi}{3}$ , найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.
- 3] Докажите, что среди всех четырехугольников с заданными диагоналями и углом между ними наименьший периметр имеет параллелограмм.
- 4] На сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  данного остроугольного треугольника  $ABC$  найдите такие точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , чтобы периметр треугольника  $A'B'C'$  был наименьшим.
- 5] Натуральное число называется *хорошим*, если оно является произведением различных простых чисел и при этом делится на каждое из этих простых чисел, уменьшенное на единицу. Найдите все хорошие числа.
- 6] (**Лемма о двух гвоздях.**) Докажите, что для любых двух пар точек  $A, B$  и  $A', B'$ , таких что  $AB = A'B' > 0$ , существуют ровно два движения, переводящие  $A$  в  $A'$ , а  $B$  в  $B'$ , одно из которых сохраняет ориентацию, а другое меняет.
- 7] Даны два равных треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$ . Докажите, что существует ровно одно движение, переводящее первый треугольник во второй.
- 8] Докажите, что каждое движение можно представить как композицию не более, чем трех симметрий.
- 9] Найдите композицию симметрий относительно прямых  $a$  и  $b$ , пересекающихся в точке  $O$ .
- 10] Найдите композицию симметрий относительно двух параллельных прямых.
- 11] Найдите остатки от деления:  
а)  $19^{10}$  на 66;      б)  $19^{14}$  на 70;      в)  $17^9$  на 48;      г)  $14^{14^{14}}$  на 100.
- 12] Вершины дерева правильно покрашены в синий и зелёный цвета, причем все листья — зелёные. Докажите, что зелёных вершин больше, чем синих.