

Листок 1. Формальная логика
2 сентября 2021
9 "В" класс

Высказывание — это утверждение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно. Из простых высказываний можно получать сложные, используя логические связки:

- отрицание \bar{A} (или $\neg A$): читается «не A », истинно всякий раз, когда A ложно;
- конъюнкция $A \wedge B$ читается « A и B »; истинно, если A и B оба истинны;
- дизъюнкция $A \vee B$ читается « A или B »; истинно, если истинно хотя бы одно из двух высказываний;
- импликация $A \rightarrow B$ читается «из A следует B » или «если A , то B »; истинно, если A и B оба истинны либо если A ложно.

1 У жителя острова Рыцарей и Лжецов спрашивают: «Вы рыцарь?» Тот отвечает: «Если я рыцарь, то съем собственную шляпу». Докажите, что ему придется съесть свою шляпу.

2 Известно, что высказывание «Если есть в кармане пачка сигарет, значит все не так уж плохо на сегодняшний день», истинно. Следует ли из этого истинность высказываний

- a** «Если нет в кармане пачки сигарет, значит все плохо на сегодняшний день»;
- b** «Если все не так уж плохо на сегодняшний день, значит есть в кармане пачка сигарет»;
- c** «Если все плохо на сегодняшний день, значит нет в кармане пачки сигарет»?

3 Предположим, что следующее высказывание истинно: «Я люблю Бетти или я люблю Джейн; кроме того, если я люблю Бетти, то я люблю Джейн.»

Следует ли из него непременно, что я люблю Бетти? Следует ли из него, что я люблю Джейн?

4 Предположим, что у меня спрашивают: «Верно ли, что если вы любите Бетти, то вы также любите Джейн?» Я отвечаю: «Если это верно, то я люблю Бетти». Следует ли отсюда, что я люблю Бетти? Следует ли отсюда, что я люблю Джейн?

5 Предположим, что следующее высказывание истинно: «Если я люблю Бетти или Джейн, то я люблю Бетти и не люблю Сью.» Следует ли из него, что я люблю какую-то конкретную девочку? Может ли случиться, что я люблю всех трех? Не люблю никого?

Предикат — это высказывание, содержащее переменную (или несколько переменных). **Квантор существования** ($\exists x P(x)$) превращает предикат $P(x)$ в высказывание, принимающее значение «истина», если найдется хотя бы один элемент a , для которого высказывание $P(a)$ истинно. **Квантор общности** ($\forall x P(x)$) превращает предикат $P(x)$ в высказывание, принимающее значение «истина», если высказывание $P(x)$ истинно при всех значениях переменной.

6 Найдите значение истинности высказываний $\forall x \forall y P(x, y)$, $\forall x \exists y P(x, y)$, $\exists y \forall x P(x, y)$, $\exists x \forall y P(x, y)$, $\forall y \exists x P(x, y)$, $\exists x \exists y P(x, y)$, где предикат $P(x, y)$ определен на множестве пар натуральных (целых положительных) чисел и означает

- a** $x \leq y$,
- b** y делится на x ,
- c** $3x + 2y$ — четное число,
- d** $x > y$.

- 7** Рассмотрев следующие предикаты: $C(x)$: « x — клоун», $F(x)$: « x смешной», переведите следующие высказывания с языка логики на русский язык:
- $\forall x (C(x) \rightarrow F(x))$,
 - $\forall x (C(x) \wedge F(x))$,
 - $\exists x (C(x) \rightarrow F(x))$,
 - $\exists x (C(x) \wedge F(x))$.
- 8** (Льюис Кэрролл «Символическая логика») Рассмотрев следующие предикаты: $P(x)$: « x — лев», $Q(x)$: « x свиреп», $R(x)$: « x пьет кофе», переведите на язык логики следующие утверждения: «Все львы свирепы», «Некоторые львы свирепы», «Львы не пьют кофе», «Некоторые львы не пьют кофе».
- 9** Найдите соответствие между высказываниями на русском языке и высказываниями на языке логики (здесь a и b — константы, P, Q, R — предикаты):
«На улице холодно и идёт дождь, а Вася пьёт чай, но никто больше чай не пьёт.»
«Все люди смертны, а Сократ — человек, следовательно, Сократ смертен.»
- $((\forall x P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(a)) \rightarrow Q(a)$
 - $P(a) \wedge Q(a) \wedge R(b) \wedge \forall x (x \neq b \rightarrow \neg R(x))$
- 10** Запишите приведенные утверждения в символической форме, используя по два квантора:
- «Любое число, не равное нулю, имеет обратное по умножению»,
 - «Существуют собаки, которые могут обогнать некоторых лошадей»,
 - «На каждой улице будет праздник»,
 - «Некоторые машины умнее людей».
- 11** Пусть $F(x, y)$ означает « x и y друзья». Переведите на русский язык высказывание $\exists x \forall y \forall z ((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z) \rightarrow \neg F(y, z))$.
- 12** Постройте отрицания к следующим высказываниям так, чтобы отрицание стояло непосредственно перед предикатами:
- $\forall x P(x)$,
 - $\exists x P(x)$,
 - $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$,
 - $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y))$,
 - $\exists x \forall y \exists z \exists w (P(x, y, z, w) \vee Q(x, y, z, w))$,
 - $\forall x (P(x) \rightarrow (\exists y Q(x, y)))$
- 13** Проверьте правильность умозаключений при помощи диаграмм Эйлера:
- Все адвокаты богаты. Все богатые едят омаров. Следовательно, все адвокаты едят омаров.
 - Некоторые адвокаты богаты. Некоторые врачи богаты. Следовательно, некоторые врачи — адвокаты.
 - Некоторые марсиане зеленые. Все елки зеленые. Следовательно, некоторые марсиане — елки.
 - Все мужчины любят мясо. Некоторые учителя — мужчины. Следовательно, некоторые учителя любят мясо.
 - Все врачи любят музыку. Все поэты любят музыку. Следовательно, все врачи — поэты.
 - Некоторые врачи умные. Все умные люди — поэты. Следовательно, некоторые врачи — поэты.
 - Все машины дорогие. Велосипед недорогой. Следовательно, велосипед — не машина.
 - Все мужчины смотрят телевизор. Некоторые слесари — мужчины. Следовательно, некоторые слесари смотрят телевизор.
 - Все люди смертны. Гуси — не люди. Следовательно, гуси бессмертны.
 - Некоторые гуси — мужчины. Некоторые мужчины играют в гольф. Следовательно, некоторые гуси играют в гольф.