

# Планарность

Спецкурс 9 класс. Гимназия 1543.

1 Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы ладья могла пройти с любого поля на любое, не переходя через спички?

2 Нарисуйте на плоскости без пересечений  а  $K_4$ ;  б  $K_{2,n}$ .

в Придумайте планарный граф с 10 вершинами, степени которых не меньше 4.

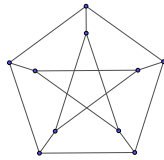
3<sup>v</sup> Докажите **формулу Эйлера**: в связном плоском графе  $v - e + f = 2$ , где  $v, e, f$  — количество вершин, ребер и граней соответственно.

**Указание.** Выясните, как меняются  $v, e, f$  при удалении одного ребра.

4 В стране 7 озер, соединенных между собой 11 непересекающимися каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в стране островов, образованных озерами и каналами?

---

5 Докажите что следующие графы не планарны, не используя теорему Куратовского или Вагнера:  а  $K_{3,3}$ ;  б  $K_5$ ;  в граф Петерсена.



6 Докажите, что в планарных графе:

а  $2e \geq 3f$ ;  б если  $v \geq 3$ , то  $e \leq 3v - 6$ ;

в существует вершина, степень которой не больше 5.

7 Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

8<sup>★</sup> На окружности поставили  $n$  точек и соединили каждые две из них хордой. На сколько частей эти хорды разрезали круг, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

---

9 Дан многогранник у которого все грани являются правильными пяти- или шестиугольниками. Сколько может быть пятиугольных граней?

10  а Сколько существует правильных многогранников?

б Сколько существует правильных планарных графов (граф называется правильным если степени всех вершин одинаковы и у всех граней одинаковое число сторон)?

11 Планарно изобразите на торе (поверхности бублика) следующие графы:

а  $K_{3,3}$ ;  б  $K_5$ ;  в<sup>★</sup>  $K_7$ .

**Указание.** Тор удобно представлять как квадрат со склеенными противоположными сторонами.

12<sup>★</sup> Докажите теорему о пяти красках

# Планарность

Спецкурс 9 класс. Гимназия 1543.

1 Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы ладья могла пройти с любого поля на любое, не переходя через спички?

2 Нарисуйте на плоскости без пересечений  а  $K_4$ ;  б  $K_{2,n}$ .

в Придумайте планарный граф с 10 вершинами, степени которых не меньше 4.

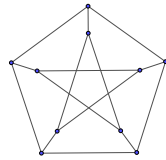
3<sup>v</sup> Докажите **формулу Эйлера**: в связном плоском графе  $v - e + f = 2$ , где  $v, e, f$  — количество вершин, ребер и граней соответственно.

**Указание.** Выясните, как меняются  $v, e, f$  при удалении одного ребра.

4 В стране 7 озер, соединенных между собой 11 непересекающимися каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в стране островов, образованных озерами и каналами?

---

5 Докажите что следующие графы не планарны, не используя теорему Куратовского или Вагнера:  а  $K_{3,3}$ ;  б  $K_5$ ;  в граф Петерсена.



6 Докажите, что в планарных графе:

а  $2e \geq 3f$ ;  б если  $v \geq 3$ , то  $e \leq 3v - 6$ ;

в существует вершина, степень которой не больше 5.

7 Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

8<sup>★</sup> На окружности поставили  $n$  точек и соединили каждые две из них хордой. На сколько частей эти хорды разрезали круг, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

---

9 Дан многогранник у которого все грани являются правильными пяти- или шестиугольниками. Сколько может быть пятиугольных граней?

10  а Сколько существует правильных многогранников?

б Сколько существует правильных планарных графов (граф называется правильным если степени всех вершин одинаковы и у всех граней одинаковое число сторон)?

11 Планарно изобразите на торе (поверхности бублика) следующие графы:

а  $K_{3,3}$ ;  б  $K_5$ ;  в<sup>★</sup>  $K_7$ .

**Указание.** Тор удобно представлять как квадрат со склеенными противоположными сторонами.

12<sup>★</sup> Докажите теорему о пяти красках