

Деревья

Спецкурс 9 класс. Гимназия 1543.

1 В пруд выпустили 40 щук. Чтобы насытиться щуке надо съесть двух других щук (сытых или годоводных). Какое наибольшее число щук может насытиться?

2 Ниже даны 5 определений: Связный граф называется деревом если:

1. В нём нет циклов.
2. Число рёбер в нём на 1 меньше числа вершин.
3. Между любыми двумя вершинами существует ровно один путь.
4. Он имеет наименьшее число рёбер среди всех связных графов на таком количестве вершин.
5. Он при удалении любого ребра распадается на компоненты связности.

Мы хотим доказать, что они все означают одно и то же

a Какое наименьшее количество утверждений вида «А равносильно В» надо для этого доказать?

b Какое наименьшее количество утверждений вида «из А следует В» надо для этого доказать?

c^v Докажите равносильность их всех.

Граф-дерево очень удобно «подвешивать за вершину». В этом случае, вершины распадаютя на «уровни», где вершина может быть соединена только с вершинами на соседних уровнях. Попробуйте на бумаге подвесить какое-нибудь дерево.

3 Докажите, что у любого дерева на более, чем одной вершине, существует как минимум два **листа** — вершины степени 1.

4 Докажите, что при удалении листа в дереве, граф всё равно остаётся деревом.

5 Докажите, что любой граф-дерево

a Двудолен

b Планарен (то есть, его можно нарисовать на плоскости так, чтобы ребра не пересекались)

c Имеет независимое множество вершин (таких, что никакие две из этого множества не соединены ребром) размера не меньше, чем половина от числа вершин.

6 Есть волейбольная сетка 20 50. Какое максимальное число веревок, её составляющих, можно разрезать так, чтобы она не распалась?

7 Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее рёбрами так, чтобы он остался связным.

8 Докажите, что в любом связном графе существует **остовное дерево** — подграф, содержащий все его вершины и являющийся деревом.

9 Несколько авиакомпаний решили связать авиалиниями 100 городов так, чтобы выполнялось два условия: a) любые два города были соединены беспересадочной линией не более чем одной авиакомпания; b) любая авиакомпания, пользуясь своими линиями, могла бы доставить пассажира из любого города в любой другой (возможно, с пересадками). Какое наибольшее число компаний смогут договориться?

Деревья

Спецкурс 9 класс. Гимназия 1543.

1 В пруд выпустили 40 щук. Чтобы насытиться щуке надо съесть двух других щук (сытых или годоводных). Какое наибольшее число щук может насытиться?

2 Ниже даны 5 определений: Связный граф называется деревом если:

1. В нём нет циклов.
2. Число рёбер в нём на 1 меньше числа вершин.
3. Между любыми двумя вершинами существует ровно один путь.
4. Он имеет наименьшее число рёбер среди всех связных графов на таком количестве вершин.
5. Он при удалении любого ребра распадается на компоненты связности.

Мы хотим доказать, что они все означают одно и то же

a Какое наименьшее количество утверждений вида «А равносильно В» надо для этого доказать?

b Какое наименьшее количество утверждений вида «из А следует В» надо для этого доказать?

c^v Докажите равносильность их всех.

Граф-дерево очень удобно «подвешивать за вершину». В этом случае, вершины распадаютя на «уровни», где вершина может быть соединена только с вершинами на соседних уровнях. Попробуйте на бумаге подвесить какое-нибудь дерево.

3 Докажите, что у любого дерева на более, чем одной вершине, существует как минимум два **листа** — вершины степени 1.

4 Докажите, что при удалении листа в дереве, граф всё равно остаётся деревом.

5 Докажите, что любой граф-дерево

a Двудолен

b Планарен (то есть, его можно нарисовать на плоскости так, чтобы ребра не пересекались)

c Имеет независимое множество вершин (таких, что никакие две из этого множества не соединены ребром) размера не меньше, чем половина от числа вершин.

6 Есть волейбольная сетка 20 50. Какое максимальное число веревок, её составляющих, можно разрезать так, чтобы она не распалась?

7 Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее рёбрами так, чтобы он остался связным.

8 Докажите, что в любом связном графе существует **остовное дерево** — подграф, содержащий все его вершины и являющийся деревом.

9 Несколько авиакомпаний решили связать авиалиниями 100 городов так, чтобы выполнялось два условия: a) любые два города были соединены беспересадочной линией не более чем одной авиакомпания; b) любая авиакомпания, пользуясь своими линиями, могла бы доставить пассажира из любого города в любой другой (возможно, с пересадками). Какое наибольшее число компаний смогут договориться?