Листок 2 Доп. Ориентированные графы

9 ”В” класс

Определение. Добавим новый вид соединения вершин — ориентированное ребро. Если из a в b проведено ориентированное ребро (тут порядок вершин важен), то по нему можно пройти из a в b, а обратно уже нельзя.

Заметим, что если две вершины соединены двумя разнонаправленными ориентированными рёбрами, то это то же самое, что они соединены обычным ребром.

Будем говорить, что в ориентированном графе нет кратных рёбер, если в нём все рёбра ориентированы, а между любыми двумя вершинами (вне зависимости от направления) проведено не более одного ребра.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Вася нарисовал полоску из $(2n+1)$ клетки, а Петя расставил в клетках с номерами $2, 4, 6, 8, \dots 2n$ знаки "$>$"и "$<$". Докажите, что Вася может в пустые клетки вписать числа так, чтобы все неравенства соблюдались.

Ориентированный граф можно рассматривать, как некоторую транспортную систему: Давайте представим, что мы в одну из вершин начинаем лить воду. Эта вода равномерно разделяется между всеми исходящими рёбрами, а если же исходящих рёбер нет, то просто остаётся в этой вершине.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Рассмотрим неориентированный граф без кратных рёбер и **циклов**. Докажите, что у него существует «сток» — вершина, из которой не выходит не одного ребра (а рёбра только приходят).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите, что в графе из предыдущей задачи можно каждой вершине приписать какое-то число так, чтобы если из v_1 есть ребро в v_2, то число соответствующее v_1 было бы больше числа для v_2.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Докажите, что вершины графа из предыдущей задачи можно записать в один ряд так, чтобы все рёбра шли строго слева-направо.

$\boxed{\mathbf{5^\star}}$ Придумайте оптимальный алгоритм построения такого ряда.

(Если в графе n вершин и m рёбер, то он должен делать не более k(n + m) действий, где k — выбранная вами фиксированная константа)

Далее, мы попробуем придумать некоторый аналог обычным компонентам связности только для ориентированных графов.

Обратите внимание, что с этого момента циклы и кратные рёбра разрешены. Будем называть ориентированный граф **сильно связным** если из любой его вершины можно добраться до любой другой.

6 Докажите, что полный ориентироанный граф сильно связен тогда и только тогда, когда существует цикл, проходящий через все вершины.

Подсказка: Индукция в помощь

7 Про связный ориентированный граф известно, что если мы выйдем из любой вершины A по любому ребру, то потом сможем вернуться по ребрам в вершину A. Докажите, что граф сильно связный.

8 Докажите, что вершины любого ориентированного графа можно разбить на группы так, что любые две вершины v_1 и v_2 лежат в одной группе тогда и только тогда, когда существует пути из v_1 в v_2 и обратно.

Каждая такая группа будет называться компонентой сильной связности.

9 Докажите, что в каждой вершине ориентированного графа можно сопоставить число так, что $f(v_1) \leq f(v_2)$ если из v_1 до v_2 существует путь.

10 В стране n городов, каждые два соединены дорогой. Министр транспорта и министр внутренних дел играют в игру: они по очереди выбирают одну дорогу и устанавливают на ней одностороннее движение. Министр, после хода которого граф перестает быть сильно связным, проигрывает. Есть ли у кого-нибудь выигрышная стратегия?

11 На рёбрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих рёбер равны. Докажите, что из каждой вершины можно дойти до каждой.