

## Графы-2

Спецкурс 9 класс. Гимназия 1543.

**Определение.** Будем говорить, что граф можно покрасить в  $n$  цветов (или же, что граф  $k$ -раскрашиваемый), если каждой вершине можно присвоить цвет от 1 до  $n$ , что любые две вершины, соединённые ребром, будут разного цвета.

- 1 Покажите, что для любого числа  $n$  существует граф, который не красится в  $n$  цветов.
- 2 Докажите, что для любого графа существует такое число  $k$ , что граф  $k$ -раскрашиваемый. Минимальное из всех таких чисел называется хроматическим числом графа.
- 3 Из полного графа на  $n$  вершин выкинули  $n - 1$  рёбра. В какое наименьшее число цветов можно гарантированно покрасить получившийся граф?
- 4<sup>v</sup> Пусть в графе степень каждой вершины меньше  $k$ . Покажите, что граф обязательно  $k$ -раскрашиваемый.
- 5<sup>★</sup> Пусть в графе степень всех вершин не превосходит  $k$ , а степень одной из вершин строго меньше  $k$ . Докажите, что граф всё равно  $k$ -раскрашиваемый.

---

6 Чему может быть равно хроматическое число для графа

a у которого все вершины имеют степень 2

b у которого все вершины имеют степень 3?

Далее мы будем говорить о двураскрашиваемых графах и построим явный критерий двураскрашиваемости.

7 Связный граф имеет хроматическое число 2. Сколькими способами его можно покрасить в 2 цвета?

8 Докажите, что вершины двураскрашиваемого графа можно разбить на две группы, так, что все рёбра графа будут идти только между этими группами.

Далее, эти группы иногда будут называться долями.

9 Докажите двудольность для следующих графов:

a Квадрат (вершины фигуры становятся вершинами графа, а рёбра - рёбрами)

b Куб (аналогично)

c<sup>★</sup>  $n$ -мерный куб (вершины - это все строки из нулей и единиц длины  $n$ , две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им строки различаются ровно в одном разряде)

---

10 Докажите, что если в двудольном графе степени всех вершин одинаковы, то вершин каждого цвета поровну.

11<sup>v</sup> Докажите, что граф двудольен тогда и только тогда когда он не содержит циклов нечётной длины.

---

12 Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске  $2017 \times 2017$  так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?

**13** Рассмотрим все такие покраски клеток доски  $1000 \times 1000$  в  $k$  цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все  $k$  цветов встречаются. При каком наименьшем  $k$  в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

## Графы-2

Спецкурс 9 класс. Гимназия 1543.

**Определение.** Будем говорить, что граф можно покрасить в  $n$  цветов (или же, что граф  $k$ -раскрашиваемый), если каждой вершине можно присвоить цвет от 1 до  $n$ , что любые две вершины, соединённые ребром, будут разного цвета.

- 1 Покажите, что для любого числа  $n$  существует граф, который не красится в  $n$  цветов.
- 2 Докажите, что для любого графа существует такое число  $k$ , что граф  $k$ -раскрашиваемый. Минимальное из всех таких чисел называется хроматическим числом графа.
- 3 Из полного графа на  $n$  вершин выкинули  $n - 1$  рёбра. В какое наименьшее число цветов можно гарантированно покрасить получившийся граф?
- 4<sup>v</sup> Пусть в графе степень каждой вершины меньше  $k$ . Покажите, что граф обязательно  $k$ -раскрашиваемый.
- 5<sup>★</sup> Пусть в графе степень всех вершин не превосходит  $k$ , а степень одной из вершин строго меньше  $k$ . Докажите, что граф всё равно  $k$ -раскрашиваемый.

---

6 Чему может быть равно хроматическое число для графа

a у которого все вершины имеют степень 2

b у которого все вершины имеют степень 3?

Далее мы будем говорить о двураскрашиваемых графах и построим явный критерий двураскрашиваемости.

7 Связный граф имеет хроматическое число 2. Сколькими способами его можно покрасить в 2 цвета?

8 Докажите, что вершины двураскрашиваемого графа можно разбить на две группы, так, что все рёбра графа будут идти только между этими группами.

Далее, эти группы иногда будут называться долями.

9 Докажите двудольность для следующих графов:

a Квадрат (вершины фигуры становятся вершинами графа, а рёбра - рёбрами)

b Куб (аналогично)

c<sup>★</sup>  $n$ -мерный куб (вершины - это все строки из нулей и единиц длины  $n$ , две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им строки различаются ровно в одном разряде)

---

10 Докажите, что если в двудольном графе степени всех вершин одинаковы, то вершин каждого цвета поровну.

11<sup>v</sup> Докажите, что граф двудольен тогда и только тогда когда он не содержит циклов нечётной длины.

---

12 Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске  $2017 \times 2017$  так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?

**13** Рассмотрим все такие покраски клеток доски  $1000 \times 1000$  в  $k$  цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все  $k$  цветов встречаются. При каком наименьшем  $k$  в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?