# Перестановки - 2

*Спецкурс 9 класс. Гимназия 1543.*

**Определение 1. (Другое определение цикла)** Будем называть перестановку $f$ циклом $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ длины $k$, если она устроена следующим образом:

1. $f(a_1) = a_2$
2. $\dots$
3. $f(a_{k-1}) = a_k$
4. $f(a_k) = a_1$
5. $x \notin \{a_1, a_2, \dots a_k\} => f(x) = x$

Отсюда естественно определить непересекающиеся циклы: для них множества элементов не пересекаются.

**1** Вычислите:

a $(1, 2, 3) \circ (4, 5, 6)$

b $(2, 5, 3) \circ (1, 6, 2)$

c $(1, 2) \circ (2, 3) \circ (3, 4)$

**2** Найдите порядок цикла длины $k$.

**3**$^{\vee}$ Докажите, что каждую перестановку можно представить в виде произведения непересекающихся циклов.

**Определение 1.** Цикл длины 2 называется транспозицией.

**4** Покажите, как представить любой цикл в виде произведения транспозиций.

---

Заметим, что задачи 3 и 4 суммарно позволяют сказать, что любая перестановка представима, как произведение транспозиций. Понятно, что таких разложений может быть несколько. Ниже, мы попробуем доказать, что чётность количества скобок в любом таком разложении будет одинаковой.

**5** Сейчас вы явно представили какое-то разложение в произведение транспозиций. Как посчитать число транспозиций, используемых в вашем разложении?

a Дана перестановка $[3, 2, 4, 1]$. Представьте её тремя различными способами как произведение транспозиций.

**Чётность перестановки (Определение 1)** Для данной перестановки $f \in S_n$ посчитаем число пар чисел $1 < i, j \leq n$, что:

$$i > j \;\; \& \;\; f(i) < f(j)$$

. Чётность количества таких пар называется чётностью перестановки.

**6** Найдите чётность перестановок:

a $[1, 2, 3, 4, 5]$

b $[3, 5, 2, 4, 1]$

c $(2, 5, 3)$

d $(1, 2, 3, 4)$

$\boxed{7^{\veebar}}$ Докажите, что при домножении на транспозицию чётность перестановки изменяется.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Докажите, что при любом разложении перестановки на транспозиции, чётность количества транспозиций инвариантна (то есть не меняется для всех возможных разложений).

Теперь становится возможным такое определение:

**Чётность перестановки (Определение 2)** Чётностью перестановки называется чётность количества транспозиций в каком-то разложении данной перестановки на транспозиции.

$\boxed{9^{\veebar}}$ Докажите эквивалентность двух определений.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Найдите чётность перестановок:

$\boxed{\text{a}}$ $(1, 2, \ldots, n)$

$\boxed{\text{b}}$ $[1, 6, 5, 3, 4, 2]$

$\boxed{\text{c}}$ $[2, 8, 6, 13, 11, 10, 12, 1, 7, 14, 5, 4, 3, 9]$

$\boxed{\mathbf{11}^{\bigstar}}$ Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причём нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста – число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать. Какой наилучший результат они могут себе гарантировать?

$\boxed{\mathbf{12}^{\bigstar}}$ Султан собрал 300 придворных мудрецов и предложил им испытание. Имеются колпаки 25 различных цветов, заранее известных мудрецам. Султан сообщил, что на каждого из мудрецов наденут один из этих колпаков, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков, то все числа будут различны. Каждый мудрец будет видеть колпаки остальных мудрецов, а свой колпак нет. Затем все мудрецы одновременно огласят предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?

# Перестановки - 2

*Спецкурс 9 класс. Гимназия 1543.*

**Определение 1. (Другое определение цикла)** Будем называть перестановку $f$ циклом $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ длины $k$, если она устроена следующим образом:

1. $f(a_1) = a_2$
2. $\ldots$
3. $f(a_{k-1}) = a_k$
4. $f(a_k) = a_1$
5. $x \notin \{a_1, a_2, \ldots a_k\} => f(x) = x$

Отсюда естественно определить непересекающиеся циклы: для них множества элементов не пересекаются.

**1** Вычислите:

a $(1, 2, 3) \circ (4, 5, 6)$

b $(2, 5, 3) \circ (1, 6, 2)$

c $(1, 2) \circ (2, 3) \circ (3, 4)$

**2** Найдите порядок цикла длины $k$.

**3**$^{\veebar}$ Докажите, что каждую перестановку можно представить в виде произведения непересекающихся циклов.

**Определение 1.** Цикл длины 2 называется транспозицией.

**4** Покажите, как представить любой цикл в виде произведения транспозиций.

---

Заметим, что задачи 3 и 4 суммарно позволяют сказать, что любая перестановка представима, как произведение транспозиций. Понятно, что таких разложений может быть несколько. Ниже, мы попробуем доказать, что чётность количества скобок в любом таком разложении будет одинаковой.

**5** Сейчас вы явно представили какое-то разложение в произведение транспозиций. Как посчитать число транспозиций, используемых в вашем разложении?

a Дана перестановка $[3, 2, 4, 1]$. Представьте её тремя различными способами как произведение транспозиций.

**Чётность перестановки (Определение 1)** Для данной перестановки $f \in S_n$ посчитаем число пар чисел $1 < i, j \leq n$, что:

$$i > j \ \ \& \ \ f(i) < f(j)$$

. Чётность количества таких пар называется чётностью перестановки.

**6** Найдите чётность перестановок:

a $[1, 2, 3, 4, 5]$

b $[3, 5, 2, 4, 1]$

c $(2, 5, 3)$

d $(1, 2, 3, 4)$

$\boxed{\mathbf{7}^{\veebar}}$ Докажите, что при домножении на транспозицию чётность перестановки изменяется.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Докажите, что при любом разложении перестановки на транспозиции, чётность количества транспозиций инвариантна (то есть не меняется для всех возможных разложений).

Теперь становится возможным такое определение:

**Чётность перестановки (Определение 2)** Чётностью перестановки называется чётность количества транспозиций в каком-то разложении данной перестановки на транспозиции.

$\boxed{\mathbf{9}^{\veebar}}$ Докажите эквивалентность двух определений.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Найдите чётность перестановок:

$\boxed{\text{a}}$ $(1, 2, \ldots, n)$

$\boxed{\text{b}}$ $[1, 6, 5, 3, 4, 2]$

$\boxed{\text{c}}$ $[2, 8, 6, 13, 11, 10, 12, 1, 7, 14, 5, 4, 3, 9]$

$\boxed{\mathbf{11}^{\star}}$ Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причём нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста – число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать. Какой наилучший результат они могут себе гарантировать?

$\boxed{\mathbf{12}^{\star}}$ Султан собрал 300 придворных мудрецов и предложил им испытание. Имеются колпаки 25 различных цветов, заранее известных мудрецам. Султан сообщил, что на каждого из мудрецов наденут один из этих колпаков, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков, то все числа будут различны. Каждый мудрец будет видеть колпаки остальных мудрецов, а свой колпак нет. Затем все мудрецы одновременно огласят предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?