Лист 17. Варьирование (метод Штурма)
9 "В" класс

Варьирование (метод Штурма) — это поиск решения последовательными улучшениями от произвольной начальной ситуации к искомой, в ходе которого нужные нам характеристики "не ухудшаются".

1 Пусть сумма положительных чисел a и b фиксирована. Как при "сближении" ведут себя величины

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}; \qquad a^2+b^2; \qquad a^3+b^3; \qquad \sqrt{a}+\sqrt{b}?$$

2 Пусть произведение положительных чисел a и b фиксировано. Как при "сближении" ведут себя величины

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}; \qquad a^2+b^2; \qquad a^3+b^3; \qquad a^n+b^n; \qquad \sqrt{a}+\sqrt{b}?$$

3 Треугольник целиком содержится в параллелограмме. Докажите, что его площадь не превышает половины площади параллелограмма.

$4^{\veebar}$ Методом Штурма докажите неравенство Коши о средних:

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\le\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

Когда достигается равенство?

---

5 Каждый ученик одного класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не более, чем 2/5. Докажите, что в классе мальчиков не более 4/7.

6 Сумма положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна 1. Докажите, что

$$(1+a_1)(2+a_2)\cdot\dots\cdot(n+a_n)\le 2n!$$

7 Найдите наименьшее k такое, что для любых положительных x, y и z верно

$$xy(x^2+y^2)^2+yz(y^2+z^2)^2+zx(z^2+x^2)^2\le k(x^6+y^6+z^6).$$

---

8 Выпуклый многоугольник содержится полностью внутри другого. Докажите, что периметр внешнего больше чем периметр внутреннего.

9 Докажите, что при $x_1, \ldots, x_n\ge 1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{1+x_1}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\ge\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ В парламенте у каждого не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в его палате будет не более одного врага.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Пусть сумма неотрицательных x, y и z равна 1. Докажите, что

$$0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}.$$

$\boxed{\mathbf{12}^\star}$ Докажите, что среди всех n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{1+4a} + \sqrt{1+4b} + \sqrt{1+4c} + \sqrt{1+4d} \le 4\sqrt{2}.$$