Неравенства — 2

9 ”В” класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ Пусть a, b, c – неотрицательные числа. Не пользуясь никакими вспомогательными неравенствами, докажите неравенства:

$\boxed{\text{a}}$ $2(a^3+b^3+c^3) \geqslant a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b \geqslant 6abc$,

$\boxed{\text{b}}$ $2(a^4+b^4+c^4) \geqslant a^3b+b^3a+a^3c+c^3a+b^3c+c^3b \geqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geqslant 2abc(a+b+c)$.

$\boxed{\mathbf{2}^{\veebar}}$ Придумайте и докажите аналогичную цепочку неравенств от $a^5+b^5+c^5$ до $abc(ab+bc+ca)$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Найдите: $\boxed{\text{a}}$ $S[3,0,0]$; $\boxed{\text{b}}$ $S[1,1,1]$; $\boxed{\text{c}}$ $S[2,1,0]$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Известно, что $a+2b+3c$ не меньше 14. Докажите, что $a^2+b^2+c^2$ также не меньше 14.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Пусть $a \geq b > 0$, $\alpha \geq \beta > 0$, $\alpha\beta = 1$. Докажите, что $a+b \leq \alpha a + \beta b$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Докажите, что для положительных a, b, c верно неравенство:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq a^2+b^2+c^2.$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются товарищами, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

$\boxed{\mathbf{8}^{\veebar}}$ Докажите обобщение неравенства о среднем квадратичном:

$$\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n} \geq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^k.$$

Подсказка: воспользуйтесь ММИ по степени k.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Докажите еще одно обобщение неравенства о среднем квадратичном:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}.$$

Когда это неравенство обратится в равенство?

$\boxed{\mathbf{10}}$ Саша желает отметить внутри заданного треугольника точку M так, чтобы для расстояний h_a, h_b, h_c от этой точки до соответствующих сторон треугольника число $\dfrac{a}{h_a}+\dfrac{b}{h_b}+\dfrac{c}{h_c}$ было как можно меньше. Какую точку ему следует выбрать? *Подсказка: воспользуйтесь неравенством из предыдущей задачи.*

$\boxed{\mathbf{11}}$ Пусть $x_1, \ldots, x_n > 0$, $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих величин (если они существуют):

$\boxed{\text{a}}$ $x_1 \cdots x_n$, $\boxed{\text{b}}$ $x_1^2 + \cdots + x_n^2$, $\boxed{\text{c}}$ $\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}$,

$\boxed{\text{d}}$ $x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$, $\boxed{\text{e}}$ $x_1^3 + \cdots + x_n^3$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Докажите **неравенство Юнга**: если $a > 0$, $b > 0$, $p > 1$ и $q > 1$, причем p и q рациональны и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Подсказка: положите $p = \dfrac{m+n}{n}, q = \dfrac{m+n}{m}$ *и воспользуйтесь неравенством Коши.*

$\boxed{\mathbf{13}}$ Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$