

Неравенства — 1

9 "В" класс

1 **a** В трапеции с основаниями, равными a и b , проведены четыре отрезка, параллельные основаниям: отрезок X_1Y_1 проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, отрезок X_2Y_2 делит трапецию на две подобных, отрезок X_3Y_3 соединяет середины боковых сторон, отрезок X_4Y_4 делит трапецию на две равновеликих. Найдите длины отрезков.

b Для произвольных $a, b > 0$ докажите **неравенство о средних**

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

геометрически (пользуясь предыдущим пунктом).

c Докажите неравенство о средних алгебраически.

d Докажите, что при $a \neq b$ все неравенства предыдущего пункта строгие.

2 Сформулируйте неравенство о средних для произвольного n .

a Докажите неравенство о средних для $n = 2^k$.

b★ Докажите неравенство о средних для произвольного n .

3 Для неотрицательных чисел a и b докажите неравенства:

a $a + 17b \geq 18 \sqrt[18]{ab^{17}},$

b $\frac{a^6 + b^9}{4} \geq 3a^2b^3 - 16,$

c $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$

4^v Докажите, что $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \leq 12$. Достигается ли равенство?

5 Две хозяйки покупали молоко каждый день в течение месяца. Цена на молоко ежедневно менялась. Средняя цена молока за месяц оказалась равной 20 рублям. Ежедневно первая хозяйка покупала по одному литру, а вторая — на 20 рублей. Кто из них потратил за этот месяц больше денег и кто купил больше молока?

6 Для целых положительных чисел a и b докажите неравенство

$$2 \sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}} \leq a^2 + b^2.$$

7 Пусть a, b, c — неотрицательные числа. Докажите неравенства:

a $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2,$

b $a^n + b^n \geq a^{n-k}b^k + a^kb^{n-k},$

c $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$

8^v Пусть $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$, i_1, \dots, i_n — произвольная перестановка чисел $1, \dots, n$. Докажите **трансперанвенство**:

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \geq x_1 y_{i_1} + \dots + x_n y_{i_n} \geq x_1 y_n + \dots + x_n y_1.$$

Подсказка: воспользуйтесь методом математической индукции.

9 Пусть $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$. Докажите **неравенство Чебышева**:

$$\frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{n} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \geq \frac{x_1 y_n + \dots + x_n y_1}{n}.$$

Подсказка: n раз воспользуйтесь трансперанвенством для циклических перестановок.

10 Докажите, что

$$4(a^6 + b^6) \geq (a^3 + b^3)(a^2 + b^2)(a + b).$$