Неравенства — теория.

9 "В" класс

$\boxed{\textbf{1}}$ Названия средних для общего числа переменных:

- $H(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{n}{1/x_1 + \cdots + 1/x_n}$ — **среднее гармоническое**,
- $G(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ — **среднее геометрическое**,
- $A(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ — **среднее арифметическое**,
- $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$ — **среднее квадратическое**.

Справедливо **неравенство о средних**:

$$H(x_1, \ldots, x_n) \leqslant G(x_1, \ldots, x_n) \leqslant A(x_1, \ldots, x_n) \leqslant Q(x_1, \ldots, x_n)$$

$\boxed{\textbf{2}}$ Пусть $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$, $i_1, \ldots, i_n$ — произвольная перестановка чисел $1, \ldots, n$. Справедливо **транснеравенство**:

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \geqslant x_1 y_{i_1} + \cdots + x_n y_{i_n} \geqslant x_1 y_n + \cdots + x_n y_1.$$

$\boxed{\textbf{3}}$ Пусть $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$. Справедливо **неравенство Чебышева**:

$$\frac{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}{n} \geqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \geqslant \frac{x_1 y_n + \cdots + x_n y_1}{n}.$$

$\boxed{\textbf{4}}$ Справедливо **неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ)**:

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

Симметрический многочлен, полученный из одночлена $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ всевозможными перестановками переменных и суммированием этих одночленов, обозначается через $S[k_1, k_2, \ldots, k_n]$.

$\boxed{\textbf{5}}$ Если $k_1 > k_2 + 1$, то для всех неотрицательных значений x_i выполнено **неравенство Мюрхеда**:

$$S[k_1, k_2, \ldots, k_n](x_1, x_2, \ldots x_n) \geq S[k_1 - 1, k_2 + 1, \ldots, k_n](x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Неравенства — теория.
9 ”В” класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ Названия средних для общего числа переменных:

- $H(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{n}{1/x_1 + \cdots + 1/x_n}$ — **среднее гармоническое**,
- $G(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ — **среднее геометрическое**,
- $A(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ — **среднее арифметическое**,
- $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$ — **среднее квадратическое**.

Справедливо **неравенство о средних**:

$$H(x_1, \ldots, x_n) \leqslant G(x_1, \ldots, x_n) \leqslant A(x_1, \ldots, x_n) \leqslant Q(x_1, \ldots, x_n)$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Пусть $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$, $i_1, \ldots, i_n$ — произвольная перестановка чисел $1, \ldots, n$. Справедливо **транснеравенство**:

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \geqslant x_1y_{i_1} + \cdots + x_ny_{i_n} \geqslant x_1y_n + \cdots + x_ny_1.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Пусть $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$. Справедливо **неравенство Чебышева**:

$$\frac{x_1y_1 + \cdots + x_ny_n}{n} \geqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \geqslant \frac{x_1y_n + \cdots + x_ny_1}{n}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Справедливо **неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ)**:

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

Симметрический многочлен, полученный из одночлена $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ всевозможными перестановками переменных и суммированием этих одночленов, обозначается через $S[k_1, k_2, \ldots, k_n]$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Если $k_1 > k_2 + 1$, то для всех неотрицательных значений x_i выполнено **неравенство Мюрхеда**:

$$S[k_1, k_2, \ldots, k_n](x_1, x_2, \ldots x_n) \geq S[k_1 - 1, k_2 + 1, \ldots, k_n](x_1, x_2, \ldots x_n).$$