Перестановки

Спецкурс 9 класс. Гимназия 1543.

Тут должен был быть анекдот, но он не цензурный.

Определение 1. Для фиксированного n перестановкой называется биекция из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя. Например, одну из перестановок длины 5 можно записать так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = [2\ 5\ 1\ 3\ 4]$$

(так как верхний ряд у всех перестановок одинаковый, его можно не писать). Так как перестановка является функцией, то иногда мы будем называть эту функцию π.

Множество S_n это все возможные перестановки n-элементного множества.

1 Какова мощность множества S_n?

2 Сколько существует перестановок из S_n в которых:

a $\pi(1) = 1$?

b $\pi(x) = x + 1$ для $x \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$?

c Чётные числа переходят в чётные, а нечётные — в нечётные?

Так как перестановки являются функциями, то как и для обычных функций, их можно применять последовательно (напомним, это называется *композицией* функций). Композицию двух перестановок принято называть их *произведением*. Заметим, что произведение перестановок является перестановкой.

Перестановка $[1\ 2\ 3\ \ldots\ n] = e$ называется тождественной.

3 Вычислите:

a $[3\ 2\ 1] \circ [2\ 3\ 1]$

b $[1\ 4\ 2\ 3\ 5] \circ [4\ 5\ 1\ 3\ 2]$

c $[3\ 1\ 2]^2$

d $[3\ 1\ 2]^3$

4 Перемножение перестановок не коммутативно: найдите две перестановки a, b, что $a \circ b \neq b \circ a$

5$^{\veebar}$

a Докажите, что для каждой перестановки a существует и единственна такая перестановка b, что $a \circ b = b \circ a = e$. В этом случае b обозначается как a^{-1}.

b Докажите, что $(a^{-1})^{-1} = a$

6 Докажите, что если a и b коммутируют (т.е. $a \circ b = b \circ a$), то $(ab)^k = a^k b^k = b^k a^k$

---

7 Вычислите

a $[3\ 1\ 2]^7$

b $[4\ 2\ 1\ 3]^{50}$

c $[2\ 1\ 5\ 3\ 4]^{100}$

8$^{\vee}$ Докажите, что для каждой перестановки a существует такое число $k > 0$, что $a^k = e$. Минимальное из таких k называется *порядком* перестановки.

9 Найдите порядки перестановок из задачи 7.

10 Докажите, что если перестановка a в некоторой степени k равна тождественной (то есть $a^k = e$), то k делится на порядок этой перестановки.

Определение 2. Перестановка вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ n & 1 & 2 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}$$

называется *циклом.*

11 Докажите, что для перестановки $\pi \in S_n$ все числа из

$$\pi(a), \pi^2(a), \pi^3(a), \ldots, \pi^n(a)$$

которые встречаются **хотя бы один раз**, встречаются одно и то же число раз.

12* Какой наибольший порядок может быть у перестановки из S_{43}?