

Симметрические многочлены

9 "В" класс

1 Выразите через симметрические многочлены $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$ степенные суммы $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$.

2^v Докажите по индукции, что каждая степенная сумма $x^n + y^n$ может быть представлена в виде многочлена от σ_1 и σ_2 .

3 Докажите, что любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от σ_1 и σ_2 .

4 Решите системы уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} x^4 + y^4 = 34, \\ x + y = 2; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^3 + y^3 = 8, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

5 Выразите через элементарные симметрические многочлены

$$\text{a) } (x + y)(y + z)(x + z), \quad \text{b) } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$$
$$\text{c) } (x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(x^2 + z^2), \quad \text{d) } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

6 Известно, что $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдите $a^4 + b^4 + c^4$.

7 **a** Пусть x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$. Чему равны значения выражений $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $x_1x_2x_3$?

b Известно, что многочлен $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ имеет три корня x_1, x_2, x_3 . Сформулируйте и докажите для x_1, x_2, x_3 теорему Виета.

8^v Числа x, y, z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно a .

9 Найдите все значения параметра a , для каждого из которых многочлен $x^3 - 6x^2 + ax + a$ имеет три корня x_1, x_2, x_3 , удовлетворяющие равенству

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0.$$

10 Постройте кубический многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

11 Известно, что многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три корня x_1, x_2, x_3 . Найдите многочлен третьей степени, корнями которого являются числа $y_1 = x_2x_3$, $y_2 = x_1x_3$, $y_3 = x_1x_2$.

12★ Решите уравнения: **a** $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1,$

b $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9,$

c $x \cdot \frac{19-x}{x+1} \cdot \left(x + \frac{19-x}{x+1}\right) = 84.$