Интерполяция

9 "В" класс

$\boxed{\mathbf{1}}$

$\boxed{\text{a}}$ Постройте многочлен P первой степени такой, что $P(0) = 1$, $P(3) = 4$.

$\boxed{\text{b}}$ Постройте многочлен P второй степени такой, что $P(1) = 1$, $P(3) = 13$, $P(5) = 36$.

$\boxed{\text{c}}$ Постройте многочлен P третьей степени такой, что $P(1) = 1$, $P(3) = 4$, $P(5) = 10$, $P(7) = 27$

$\boxed{\mathbf{2}^{\veebar}}$ Докажите, что интерполяционный многочлен единственный.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Решите уравнения (a, b, c — различные числа):

$\boxed{\text{a}}$ $$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x$$

$\boxed{\text{b}}$ $$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} =$$
$$= a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$

$\boxed{\text{a}}$ Постройте многочлен P который в точках $x_1, \ldots x_n$ равен нулю, а в остальных точках отличен от нуля.

$\boxed{\text{b}}$ Постройте многочлен P степень которого 2, и который в точке x_0 принимает значение 1, а в точках x_1 и x_2 равен 0.

$\boxed{\text{c}}$ Постройте многочлен P степени ниже n который в точке x_0 принимает значение 1, а в точках $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ равен нулю.

$\boxed{\text{d}}$ Постройте многочлен P степени n который в точке x_0 принимает значение y_0, а в точках $x_1, x_2 \ldots x_n$ равен нулю.

$\boxed{\text{e}}$ Постройте многочлен P степени n который в точке x_1 принимает значение y_1, а во всех точках $x_0, x_2, \ldots x_n$ равен нулю.

$\boxed{\text{f}}$ Постройте многочлен P степени не выше n который в точке x_0 принимает значение y_0, в точке x_1 принимает значение y_1, а в точках $x_2, \ldots x_n$ равен нулю.

$\boxed{\text{g}}$ Постройте многочлен P степени не выше n такой, что $P(x_i) = y_i$, где $i = 0, 1, \ldots, n$, а x_i, y_i — любые вещественные числа.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Докажите, что если в записи $(x^2 - x + 1)^{1543}$ раскрыть скобки и привести подобные, то какой-нибудь коэффициент полученного выражения будет отрицательным.

6 Верно ли, что для любых трех точек на плоскости с различными абсциссами существует парабола на которой они лежат?

7$^{\veebar}$ Докажите существование интерполяционного многочлена Ньютона.

8 Леонард Эйлер указывал многочлен $P(x) = x^2 + x + 41$, для которого $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(39)$ — простые числа. Однако не существует многочлена не нулевой степени с целыми коэффициентами, у которого значения при любых целых x были бы простыми числами. Докажите это.

9★

a Рассмотрим многочлен $x^p - x$ как многочлен над полем F^p — полем всех остатков по простому модулю p. Разложите его на линейные множители.

b Приравняйте коэффициенты при x в этом многочлене и в его разложении. Что вы получили?