Попытка подружиться с многочленами

9 ”В” класс

$\boxed{\mathbf{1}^{\veebar}}$ Известно, что коэффициенты многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

целые, а p/q — рациональный корень этого многочлена, представленный в виде несократимой дроби. Докажите, что тогда a_0 делится на p, а a_n делится на q.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Решите уравнение

$$x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 22x - 12 = 0$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите, что каждый многочлен нечетной степени имеет, по крайней мере, один корень.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Найдите все многочлены $f(x)$, такие что $2f(2x) = f(3x) + f(x)$ для всех x. (*Указание: найдите старший коэффициент этого многочлена.*)

$\boxed{\mathbf{5}}$ Найдите все многочлены $f(x)$, такие что $f(x^2) = f(x)^2$ для всех x.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Найдите все натуральные n, при которых число $n^3 + 2n^2 + 4n + 3$ делится на число $n^2 + 1$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Существует ли многочлен f степени 1000 такой, что $f(x^2 + 4x + 2)$ делится на $f(x)$?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ имеет 2 различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение
$f(f(x)) = 0$ имеет 3 различных корня, а уравнение $f(f(f(x))) = 0$ имеет 7 различных корней?

$\boxed{\mathbf{9}^{\bigstar}}$ Число называется <u>алгебраическим</u>, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что существуют неалгебраические действительные числа. (Подсказка: не надо искать такое число.)

$\boxed{\mathbf{10}}$

$\boxed{\text{a}}$ Пусть A и B — многочлены с целыми коэффициентами, старший член B равен 1. Докажите, что остаток и частное при делении многочлена A на B имеют целые коэффициенты.

$\boxed{\text{b}}$ Что будет верно если старший член многочлена B отличен от 1?

$\boxed{\mathbf{11}}$ Многочлен с целыми коэффициентами в трех целых точках принимает значения 2. Может ли он принимать в какой-то целой точке значение 3?

Попытка подружиться с многочленами

9 "В" класс

$\boxed{\mathbf{1}^{\veebar}}$ Известно, что коэффициенты многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

целые, а p/q — рациональный корень этого многочлена, представленный в виде несократимой дроби. Докажите, что тогда a_0 делится на p, а a_n делится на q.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Решите уравнение

$$x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 22x - 12 = 0$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите, что каждый многочлен нечетной степени имеет, по крайней мере, один корень.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Найдите все многочлены $f(x)$, такие что $2f(2x) = f(3x) + f(x)$ для всех x. (*Указание: найдите старший коэффициент этого многочлена.*)

$\boxed{\mathbf{5}}$ Найдите все многочлены $f(x)$, такие что $f(x^2) = f(x)^2$ для всех x.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Найдите все натуральные n, при которых число $n^3 + 2n^2 + 4n + 3$ делится на число $n^2 + 1$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Существует ли многочлен f степени 1000 такой, что $f(x^2 + 4x + 2)$ делится на $f(x)$?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ имеет 2 различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение
$f(f(x)) = 0$ имеет 3 различных корня, а уравнение $f(f(f(x))) = 0$ имеет 7 различных корней?

$\boxed{\mathbf{9}^\star}$ Число называется алгебраическим, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что существуют неалгебраические действительные числа. (Подсказка: не надо искать такое число.)

$\boxed{\mathbf{10}}$

$\boxed{\text{a}}$ Пусть A и B — многочлены с целыми коэффициентами, старший член B равен 1. Докажите, что остаток и частное при делении многочлена A на B имеют целые коэффициенты.

$\boxed{\text{b}}$ Что будет верно если старший член многочлена B отличен от 1?

$\boxed{\mathbf{11}}$ Многочлен с целыми коэффициентами в трех целых точках принимает значения 2. Может ли он принимать в какой-то целой точке значение 3?