

Знакомимся с многочленами.

9 "В" класс

1 Найдите НОД двух многочленов f и g , если

a $f = x^3 + x - 2, g = x^3 + x^2 - x - 1;$

b $f = x^3 + 4x^2 + 7x + 4, g = x^3 + 5x^2 + 10x + 8;$

c $f = x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 6, g = x^4 + 6x^2 + 3x + 10.$

2 a Докажите, что для любых ненулевых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$, такие что $uf + vg = (f, g)$.

b Найдите u и v для многочленов $P(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^2 - 3x - 1$ и $Q(x) = 2x^3 - x^2 + x + 1$.

3^v Найдите остаток от деления многочлена $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$

a на $x - 1;$

b на $x^2 - 1$

4 Многочлен $P(x)$ дает при делении

a на $(x - 1)$ остаток 2, а при делении на $(x - 2)$ остаток 1. Найти остаток от деления $P(x)$ на $x^2 - 3x + 2$.

b на $(x + 1)$ остаток 15, а при делении на $(x - 1)$ остаток 43. Найти остаток от деления $P(x)$ на $x^2 - 1$.

5

a Докажите что если многочлен $P(x)$ делится на $(x - 1)$, то сумма его коэффициентов равна нулю.

b Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $Q(x) = (2x^3 - 2x^2 + 1)^{43}$.

c Найдите сумму всех коэффициентов $Q(x)$ при нечетной степени переменной.

d Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $(1 + 2x - 4x^2)^{248}(1 - 7x + 5x^2)^{345}$.

e Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что он делится на $x^3 - 4x + 13$. На какую цифру оканчивается сумма всех его коэффициентов?

6^v Докажите **Теорему Безу**: остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $x - c$ равен $f(c)$.

7 Есть ли общие корни у уравнений $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0$ и $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 4 = 0$?

8★ Решите уравнение:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1$$