Многочлены теория.

9 ”В” класс

Многочленом называется выражение вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

где $a_0, \dots, a_n$ — произвольные действительные числа, $a_n \neq 0$. Число n называется **степенью многочлена**: $n = deg\ f$.

Суммой многочленов $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ и $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$ называется многочлен

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

При сложении многочленов разных степеней недостающие коэффициенты многочлена меньшей степени считаются равными 0.

Произведением многочленов $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ и $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$ называется многочлен

$$f(x)g(x) = (a_n b_m)x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{n+m-1} + \dots + (a_0 b_0).$$

Наибольшим общим делителем двух многочленов, один из которых ненулевой, называется многочлен максимальной степени, на который делится каждый из данных многочленов. Обозначение: (f, g).

Для многочленов работает все тот же самый алгоритм Евклида. (Докажите что НОД(f,g)=НОД(f,$g - f$).)

Многочлен $f(x)$ называется **неприводимым**, если его нельзя представить в виде $f(x) = g(x)h(x)$, где $deg\ g > 0$, $deg\ h > 0$.

Лемма Евклида: если произведение fg делится на неприводимый многочлен p, то f или g делится на p.

Основная теорема арифметики для многочленов: любой многочлен можно разложить на неприводимые множители, причем это разложение единственно с точностью до множителей нулевой степени и порядка множителей.

Значением многочлена $f(x)$ в точке c, где c — произвольное число, называется число $f(c) = a_n c^n + \cdots + a_0$. Если $f(c) = 0$, то c называется **корнем** многочлена f.

Теорема Безу: остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $x - c$ равен $f(c)$.

Из теоремы Безу следует, что c является корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $x - c$. Если $f(x)$ делится на $(x-c)^k$, но не делится на $(x-c)^{k+1}$, то c называется **корнем многочлена $f(x)$ кратности k**. Корень кратности 1 называется также простым корнем.

Любой многочлен степени n имеет не более n корней.

Построение многочлена P степени не выше n, что $P(x_i) = y_i$, где $i = 0, 1, \ldots, n$ называется **интерполяцией**. Соответствующий многочлен P называется **интерполяционным многочленом**.

Интерполяционный многочлен в виде

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$$

называется **интерполяционным многочленом Лагранжа**.

Интерполяционный многочлен в виде

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

называется **интерполяционным многочленом Ньютона**.

Многочлен называется **целозначным** если он принимает целые значения в целых точках.

Многочлен от двух переменных x и y называется **симметрическим**, если он не изменяется при замене x на y, а y на x.

Любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от σ_1 и σ_2, где $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$.

Многочлен от нескольких переменных, не изменяющийся при любых перестановках своих переменных, называется **симметрическим от нескольких переменных**.

Многочлены

$$\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$
$$\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,$$
$$\ldots$$
$$\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 \ldots x_n.$$

называются **элементарными симметрическими**.

Любой симметрический многочлен от x_1, x_2, ..., x_n можно представить в виде многочлена от σ_1, σ_2, ..., σ_n.