Движения и подобия. Теория.

9 "В" класс

Движением называется преобразование (т.е. взаимнооднозначное отображение плоскости на себя), при котором расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их образами.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Свойства движений $\boxed{\text{a}}$ Композиция (последовательное применение) двух движений есть движение. $\boxed{\text{b}}$ Преобразование, обратное движению есть движение. $\boxed{\text{c}}$ Тождественное преобразование (преобразование, оставляющее каждую точку на месте) есть движение.

Совокупность преобразований, удовлетворяющая свойствам $\boxed{\text{a}}$–$\boxed{\text{c}}$ называется **группой**. Таким образом, движения плоскости образуют группу.

Параллельным переносом на вектор $\vec{n}$ называется преобразование плоскости, которое каждую точку A переводит в такую точку A', что $\vec{AA'} = \vec{n}$.

Поворотом вокруг точки O на угол φ называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку A в такую точку A', что $OA = OA'$ и угол между лучами OA и OA' (т.е. угол, отсчитываемый против часовой стрелки от луча OA к лучу OA') равен φ.

Поворот на угол π называется **центральной симметрией**.

Симметрией относительно прямой l называется преобразование, переводящее каждую точку A в такую точку A', что прямая l перпендикулярна отрезку AA' и проходит через его середину.

Треугольник ABC называется положительно ориентированным, если точки A, B, C следуют друг за другом при его обходе против часовой стрелки, и отрицательно ориентированным в противном случае. Преобразование плоскости называется **сохраняющим ориентацию**, если оно переводит каждый треугольник в треугольник той же ориентации, и **меняющим ориентацию**, если оно переводит каждый треугольник в треугольник противоположной ориентации.

Теорема Шаля: любое движение является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо симметрией, либо композицией симметрии и параллельного переноса на вектор параллельный оси симметрии (последний вид движения называется **скользящей симметрией**).

Лемма о двух гвоздях. Для любых двух пар точек A, B и A', B', таких что $AB = A'B' > 0$, существуют ровно два движения, переводящие A в A', а B в B', одно из которых сохраняет ориентацию, а другое меняет.

Подобием называется преобразование при котором для любых двух точек A и B отношение расстояний между их образами A' и B' к расстоянию между самими точками равно одному и тому же числу: $A'B' = k \cdot AB$. Число $k > 0$ называется **коэффициентом подобия**.

Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k, отличным от нуля, называется преобразование, переводящее каждую точку A в точку A', лежащую на прямой OA и удовлетворяющую условию $OA' = k \cdot OA$. При $k > 0$ точки A и A' лежат по одну сторону от точки O, при $k < 0$ по разные.

Теорема о подобии: Любое подобие, сохраняющее ориентацию, с коэффициентом k, отличным от 1, является композицией гомотетии с центром в некоторой точке O и коэффициентом k и поворотом вокруг O (иногда такое преобразование называется **спиральным подобием**).

Любое подобие с коэффициентом, не равным 1, меняющее ориентацию, можно представить в виде композиции гомотетии с центром в некоторой точке O и симметрии относительно прямой, проходящей через O.