

# Листок 1. Формальная логика

## 9 "В" класс

**Высказывание** — это утверждение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно. Из простых высказываний можно получать сложные, используя логические связки:

- отрицание  $\bar{A}$  (или  $\neg A$ ): читается «не  $A$ », истинно всякий раз, когда  $A$  ложно;
- конъюнкция  $A \wedge B$  читается « $A$  и  $B$ »; истинно, если  $A$  и  $B$  оба истинны;
- дизъюнкция  $A \vee B$  читается « $A$  или  $B$ »; истинно, если истинно хотя бы одно из двух высказываний;
- импликация  $A \rightarrow B$  читается «из  $A$  следует  $B$ » или «если  $A$ , то  $B$ »; истинно, если  $A$  и  $B$  оба истинны либо если  $A$  ложно.

**1** У жителя острова Рыцарей и Лжецов спрашивают: «Вы рыцарь?» Тот отвечает: «Если я рыцарь, то съем собственную шляпу». Докажите, что ему придется съесть свою шляпу.

**2** Известно, что высказывание "Если есть в кармане пачка сигарет, значит все не так уж плохо на сегодняшний день" истинно. Следует ли из этого истинность высказываний

- a** "Если нет в кармане пачки сигарет, значит все плохо на сегодняшний день" ;
- b** "Если все не так уж плохо на сегодняшний день, значит есть в кармане пачка сигарет" ;
- c** "Если все плохо на сегодняшний день, значит нет в кармане пачки сигарет" ?

**3** Предположим, что следующее высказывание истинно: «Я люблю Бетти или я люблю Джейн; кроме того, если я люблю Бетти, то я люблю Джейн.»

Следует ли из него непременно, что я люблю Бетти? Следует ли из него, что я люблю Джейн?

**4** Предположим, что у меня спрашивают: «Верно ли, что если вы любите Бетти, то вы также любите Джейн?» Я отвечаю: «Если это верно, то я люблю Бетти». Следует ли отсюда, что я люблю Бетти? Следует ли отсюда, что я люблю Джейн?

**5** Предположим, что следующее высказывание истинно: «Если я люблю Бетти или Джейн, то я люблю Бетти и не люблю Сью.» Следует ли из него, что я люблю какую-то конкретную девочку? Может ли случиться, что я люблю всех трех? Не люблю никого?

**Предикат** — это высказывание, содержащее переменную (или несколько переменных). **Квантор существования** ( $\exists x P(x)$ ) превращает предикат  $P(x)$  в высказывание, принимающее значение «истина», если найдется хотя бы один элемент  $a$ , для которого высказывание  $P(a)$  истинно. **Квантор общности** ( $\forall x P(x)$ ) превращает предикат  $P(x)$  в высказывание, принимающее значение «истина», если высказывание  $P(x)$  истинно при всех значениях переменной.

**6** Найдите значение истинности высказываний  $\forall x \forall y P(x, y)$ ,  $\forall x \exists y P(x, y)$ ,  $\exists y \forall x P(x, y)$ ,  $\exists x \forall y P(x, y)$ ,  $\forall y \exists x P(x, y)$ ,  $\exists x \exists y P(x, y)$ , где предикат  $P(x, y)$  определен на множестве пар натуральных (целых положительных) чисел и означает

- a**  $x \leq y$ ,
- b**  $y$  делится на  $x$ ,
- c**  $3x + 2y$  — четное число,
- d**  $x > y$ .

**7** Рассмотрев следующие предикаты:  $C(x)$ : « $x$  — клоун»,  $F(x)$ : « $x$  смешной», переведите следующие высказывания с языка логики на русский язык:

- a  $\forall x (C(x) \rightarrow F(x)),$
- b  $\forall x (C(x) \wedge F(x)),$
- c  $\exists x (C(x) \rightarrow F(x)),$
- d  $\exists x (C(x) \wedge F(x)).$

**8** (Льюис Кэрролл «Символическая логика») Рассмотрев следующие предикаты:  $P(x)$ : « $x$  — лев»,  $Q(x)$ : « $x$  свиреп»,  $R(x)$ : « $x$  пьет кофе», переведите на язык логики следующие утверждения: «Все львы свирепы», «Некоторые львы не пьют кофе».

**9** Найдите соответствие между высказываниями на русском языке и высказываниями на языке логики (здесь  $a$  и  $b$  — константы,  $P, Q, R$  — предикаты):

«На улице холодно и идёт дождь, а Вася пьёт чай, но никто больше чай не пьёт.»

«Все люди смертны, а Сократ — человек, следовательно, Сократ смертен.»

- a  $((\forall x P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(a)) \rightarrow Q(a)$
- b  $P(a) \wedge Q(a) \wedge R(b) \wedge \forall x (x \neq b \rightarrow \neg R(x))$

**10** Запишите приведенные утверждения в символической форме, используя по два квантора:

- a «Любое число, не равное нулю, имеет обратное по умножению»,
- b «Существуют собаки, которые могут обогнать некоторых лошадей»,
- c «На каждой улице будет праздник»,
- d «Некоторые машины умнее людей».

**11** Пусть  $F(x, y)$  означает « $x$  и  $y$  друзья». Переведите на русский язык высказывание  $\exists x \forall y \forall z ((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z) \rightarrow \neg F(y, z))$ .

**12** Постройте отрицания к следующим высказываниям так, чтобы отрицание стояло непосредственно перед предикатами:

- a  $\forall x P(x),$
- b  $\exists x P(x),$
- c  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)),$
- d  $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y)),$
- e  $\exists x \forall y \exists z \exists w (P(x, y, z, w) \vee Q(x, y, z, w)),$
- f  $\forall x (P(x) \rightarrow (\exists y Q(x, y)))$

**13** Проверьте правильность умозаключений при помощи диаграмм Эйлера:

- a Все адвокаты богаты. Все богатые едят омаров. Следовательно, все адвокаты едят омаров.
- b Некоторые адвокаты богаты. Некоторые врачи богаты. Следовательно, некоторые врачи — адвокаты.
- c Некоторые марсиане зеленые. Все елки зеленые. Следовательно, некоторые марсиане — елки.
- d Все мужчины любят мясо. Некоторые учителя — мужчины. Следовательно, некоторые учителя любят мясо.
- e Все врачи любят музыку. Все поэты любят музыку. Следовательно, все врачи — поэты.
- f Некоторые врачи умные. Все умные люди — поэты. Следовательно, некоторые врачи — поэты.
- g Все машины дорогие. Велосипед недорогой. Следовательно, велосипед — не машина.
- h Все мужчины смотрят телевизор. Некоторые слесари — мужчины. Следовательно, некоторые слесари смотрят телевизор.
- i Все люди смертны. Гуси — не люди. Следовательно, гуси бессмертны.
- j Некоторые гуси — мужчины. Некоторые мужчины играют в гольф. Следовательно, некоторые гуси играют в гольф.