

8 «ВТ». Спецкурс. Занятие 6.

27 сентября 2022

Делимость и остатки.

Землю в четверти делить без Евклида смыслим,
Сколько копеек в рубле, без алгебры счислим.

А. Д. Кантемир

Определение. Целое число a делится на целое число b (записывают $a:b$), если существует такое целое число c , что $a = bc$. По-другому говорят, что b делит a (записывают $b|a$).

1 Может ли сумма семи слагаемых делиться на число, на которое не делится

a) ровно одно из слагаемых;

b) ровно два из слагаемых;

c) ни одно из слагаемых?

2 Докажите, что

a) если $a:b$ и $b:c$, то $a:c$ (транзитивность);

b) $a:b$ и $b:a$, то либо $a = b$, либо $a = -b$.

3 Про некоторое целое число сказали следующее: «оно делится на 15», «оно делится на 25», «оно делится на 33», «оно делится на 55», «оно делится на 165». Известно, что четыре утверждения верны, а одно — нет. Какое?

4 Докажите или опровергните для целых a , x , y следующие утверждения:

a) из $y:a$ следует $xy:a$;

b) из $x:a$ и $y:a$ следует $(x + y):a$;

c) $x:y$ равносильно $ax:ay$.

5 Двухзначное число написали три раза подряд. Докажите, что получившееся шестизначное число делится на 7, 13, 37.

6 Натуральные числа a и b таковы, что $56a = 65b$. Докажите, что число $a + b$ составное.

Определение. Разделить целое a на целое (и ненулевое) b с остатком — значит представить a в виде $bq + r$, где $0 \leq r < |b|$ и q целое. Число q при этом называется *неполным частным*, а r — *остатком* от деления a на b .

7 Число a дает при делении на b остаток r . Какой остаток при делении на b даст число $-a$?

8 Делитель и делимое увеличили в 3 раза. Как изменятся частное и остаток?

9 Пусть $|a| = 17$, а $|b| = 5$. Найдите, чему может быть равен остаток от деления a на b .

10 Число 2022 разделили с остатком на m . Оказалось, что неполное частное равно остатку. Чему могло быть равно число m ?

11 Вспомните и докажите признаки делимости на

a) 2, 4, 8;

b) 5, 25;

c) 3, 9;

d) 11.

12 В справочнике «Магия для чайников» написано:

Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение.

Возможно ли таким образом устроить землетрясение?