

8 «ВТ». Спецкурс. Занятие 5.
21 сентября 2022
Периодичность. Зацикливание.

И кружит, и кружит последний троллейбус
По вольному кругу ночного кольца.
И ты не робеешь, и я не колеблюсь
Кружить и кружить по нему без конца.

Юлий Ким

- 1** **a** Какой цифрой оканчивается число 2021^{2022} ? **b** А 2022^{2021} ?

0 На доске написана длинная последовательность чисел. Она начинается с двух единиц, а каждое следующее число получается по такому правилу: два предыдущих числа перемножаются, к произведению добавляется 1, и берётся остаток от деления результата на 4. Найдите 1543-е число в этой последовательности.

Определение. Последовательность называется *периодической*, если начиная с какого-то момента она состоит из одинаковых повторяющихся конечных кусочков (один такой кусочек называется *периодом*). У периодической последовательности может быть *предпериод* — конечное число элементов в начале, после которых идут только периоды.

1 Про каждую из нижеследующих последовательностей скажите, периодическая ли она. Если да, укажите (наименьший) предпериод и период.

a 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, ...

b 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

c 1, 3, 4, 7, 11, 18 ... (каждое следующее число — сумма двух предыдущих)

d 8, 7, 7, 9, 7, 7, 9, 7, 7, 9, 7, 7, ...

e 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, ...

f 2, 2, 6, 4, 6, 6, ... (каждое число, начиная с третьего — последняя цифра произведения двух предыдущих, увеличенная на два)

2 Придумайте последовательность, состоящую только из 1 и 2, которая не зацикливается.

3 В бюрократическом учреждении 5 кабинетов. Вова пришёл туда за справкой. Его посылают из кабинета в кабинет в таком порядке:

1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 4...

Дверь какого кабинета озверевший Вова откроет сотой?

4 Варя написала на доске число 25. Каждый, кто проходит мимо доски, считает сумму цифр числа, умножает её на 2 и записывает полученное число взамен старого. Мимо доски прошло 1000 человек.

a Сколько раз (считая первый) на доске появлялось число 25?

b Сколько раз на доске было написано число 14?

5 **a** Федя наклеил на каждый кабинет в школе табличку «Спецкурс 8ВТ в кабинете №...» (на разных табличках номера кабинетов могут быть разными, а могут и повторяться). Александр Вячеславович пытается найти 8ВТ, руководствуясь табличками. Докажите, что в какой-то момент он начнёт ходить по циклу.

b К поискам подключились Анна Алексеевна, Татьяна Витальевна и Тамара Евгеньевна, и все четверо, стартовав из разных кабинетов, раз в минуту перемещаются в новый кабинет, руководствуясь табличками. Докажите, что, если на всех табличках написаны разные кабинеты, в какой-то момент учителя вновь одновременно окажутся в тех кабинетах, из которых начали.

6 На доске записаны в ряд сто чисел, отличных от нуля. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, является произведением двух соседних с ним чисел. Первое число равно 7. Чему равно последнее число?

7 В последовательности цифр n -я цифра для каждого натурального n равна последней цифре суммы $1 + 2 + \dots + n$ (то есть последовательность начинается следующим образом: 1, 3, 6, 0, 5, ...). Докажите, что последовательность периодична без предпериода.

8 В городе Энске есть несколько площадей, соединенных улицами. От каждой площади отходит ровно три улицы, все в разные стороны. Участник соревнований по городскому ориентированию ходит по улицам, на каждой площади сворачивая по очереди то направо, то налево. Докажите, что его маршрут рано или поздно зациклится.

6 На доске записаны в ряд сто чисел, отличных от нуля. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, является произведением двух соседних с ним чисел. Первое число равно 7. Чему равно последнее число?

7 В последовательности цифр n -я цифра для каждого натурального n равна последней цифре суммы $1 + 2 + \dots + n$ (то есть последовательность начинается следующим образом: 1, 3, 6, 0, 5, ...). Докажите, что последовательность периодична без предпериода.

8 В городе Энске есть несколько площадей, соединенных улицами. От каждой площади отходит ровно три улицы, все в разные стороны. Участник соревнований по городскому ориентированию ходит по улицам, на каждой площади сворачивая по очереди то направо, то налево. Докажите, что его маршрут рано или поздно зациклится.

6 На доске записаны в ряд сто чисел, отличных от нуля. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, является произведением двух соседних с ним чисел. Первое число равно 7. Чему равно последнее число?

7 В последовательности цифр n -я цифра для каждого натурального n равна последней цифре суммы $1 + 2 + \dots + n$ (то есть последовательность начинается следующим образом: 1, 3, 6, 0, 5, ...). Докажите, что последовательность периодична без предпериода.

8 В городе Энске есть несколько площадей, соединенных улицами. От каждой площади отходит ровно три улицы, все в разные стороны. Участник соревнований по городскому ориентированию ходит по улицам, на каждой площади сворачивая по очереди то направо, то налево. Докажите, что его маршрут рано или поздно зациклится.