

8 «ВТ». Спецкурс. Занятие 4.
14 сентября 2022
Комбинаторика-2. Треугольник Паскаля.

Письмо это вышло более длинным только потому,
что мне некогда было написать его покороче.

Блез Паскаль

В классе.

- 1 Какое число стоит в треугольнике Паскаля
- a на первом месте в миллионной строчке
 - b на втором месте в 3451 строчке
 - c на пятом месте в 10 строчке?
- 2
- a Встречается ли в треугольнике Паскаля число 1543?
 - b Сколько раз в треугольнике Паскаля встречается число 36?
 - c А число 1?
 - d Правда ли, что есть хотя бы два числа, которые встречаются бесконечное число раз?
- 3 Нижеследующие равенства докажите хотя бы двумя способами (через треугольник Паскаля, алгебраически или с помощью комбинаторных рассуждений):
- a $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
 - b $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$
 - c $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$
 - d $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

Дома.

- 1 Сколькими способами можно разместить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?
- 2 Семён хочет выписать на доску все четырёхзначные числа, в которых первая цифра больше второй, вторая цифра больше третьей, а третья больше четвёртой. Сколько чисел ему придётся выписать?
- 3 Сколько разных последовательностей букв можно получить, переставляя буквы в слове
- a МОСКВА
 - b ОСТРОВ
 - c КАМЧАТКА?
- 4 Пусть $k \leq m \leq n$. Докажите, что
- a $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$
 - b $C_n^m \cdot C_m^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$
 - c $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + \dots + (n-1) \cdot C_n^{n-1} + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$
- (Постарайтесь придумать несколько способов доказательства.)