Программа устного экзамена по спецкурсу. 8 «ВТ».

1. Принцип математической индукции.

2. Число сочетаний (определение и формула). $C_n^k = C_n^{n-k}$. $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

3. Треугольник Паскаля (определение). Его элементы — $C_n^k$ (доказательство). $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$.

4. Бином Ньютона (формулировка и доказательство). $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

5. Делимость нацело и деление с остатком (определения). Сравнимость по модулю (определение). Свойства сравнений (доказательство).

6. Прямой и обратный алгоритм Евклида (как и зачем). Соотношение Безу (формулировка, доказательство). Решение диофантовых уравнений вида $ax + by = c$, где $(a,b) = 1$.

7. Лемма Евклида. Основная теорема арифметики (формулировка, доказательство). Число делителей натурального числа (связь с разложением на простые множители).

8. Деление по модулю (определение). Сравнение $ax \equiv b \pmod{n}$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $(a,n) = 1$ (доказательство).

9. Обратные остатки (определение, единственность). Обратимые остатки и делители нуля по модулю $n$ (определение). Теорема Вильсона (формулировка, доказательство).

10. Малая теорема Ферма (формулировка, доказательство).

11. Китайская теорема об остатках (формулировка, доказательство).

12. Множества: элементы, подмножества, пустое множество (определения). Число подмножеств конечного множества. $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + \dots + (n-1) \cdot C_n^{n-1} + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$.

13. Операции на множествах (объединение, пересечение, разность), их свойства. Формула включений-исключений (формулировка и доказательство).

14. Декартово произведение множеств, бинарное отношение (определения). Мощность декартова произведения двух конечных множеств. Отношение эквивалентности (определение, примеры).

15. Вероятность: вероятностное пространство, элементарный исход, событие (определения). Несовместные и независимые события (определения, формулы).

16. Условная вероятность (определение). Формула Байеса. Формула полной вероятности (формулировки и доказательства).

17. Графы: степень вершины, связность, компоненты связности (определения). Лемма о рукопожатиях (формулировка и доказательство). Число рёбер в полном графе.

18. Деревья, листы (определения). Число рёбер в дереве на $n$ вершинах. В дереве хотя бы 2 листа. Остовное дерево (определение, существование). Минимальное число рёбер в связном графе.

19. Двудольный граф (определение). Критерий двудольного графа (формулировка и доказательство). Теорема Холла (о свадьбах).

20. Эйлеров граф (определение). Критерий эйлеровости графа (формулировка и доказательство). То же для ориентированного графа. Число путей, на которые разбивается граф с $2k$ нечётными вершинами.

21. Деление многочленов с остатком. Теорема Безу. Многочлен степени $n$ имеет не больше $n$ корней (формулировки и доказательства).

Задачи, которые надо уметь решать. (Все они были у вас в листочках; числа могут меняться.)

**1** Плоскость разрезана $n$ прямыми на несколько частей. Докажите, что эти части можно раскрасить в чёрный и белый цвета таким образом, чтобы любые две части, имеющие общий кусок границы, были раскрашены в разные цвета.

**2** Докажите по индукции, что:

a $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

b $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$;

c $1^2+2^2+3^2...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**3** В городе Энске есть несколько площадей, соединенных улицами. От каждой площади отходит ровно три улицы, все в разные стороны. Участник соревнований по городскому ориентированию ходит по улицам, на каждой площади сворачивая по очереди то направо, то налево. Докажите, что его маршрут рано или поздно зациклится.

**4** В последовательности чисел Фибоначчи первые два числа равны 1, а каждое следующее равно сумме двух предыдущих. Докажите, что в ней найдётся число, запись которого оканчивается на 00.

**5** В 8 «ВМ» 15 человек. Сколькими способами можно поделить их на 3 команды по 5 человек в каждой?

**6** Семён хочет выписать на доску все четырёхзначные числа, в которых первая цифра больше второй, вторая цифра больше третьей, а третья больше четвёртой. Сколько чисел ему придётся выписать?

**7** Тимур сложил 10 одинаковых самолётиков и хочет запустить их все на четырёх уроках. Сколькими способами он может это сделать, если требуется, чтобы на каждом уроке был запущен хотя бы один самолёт?

**8** На бесконечной клетчатой полоске сидит жук. Он хочет сделать $2n$ прыжков, каждый раз прыгая на соседнюю клетку, и вернуться в начальную клетку. Сколькими способами он может это сделать?

**9** $(a+b)^n$ разложили по формуле бинома Ньютона. Второе слагаемое оказалось равно 240, третье — 720, а четвёртое — 1080. Найдите $x$, $y$ и $n$.

**10** Число 2022 разделили с остатком на $m$. Оказалось, что неполное частное равно остатку. Чему могло быть равно число $m$?

**11** На доске написано 7 чисел. Докажите, что несколько из них (возможно, одно или все) можно покрасить красным, так чтобы сумма всех красных чисел делилась на 7.

**12** Докажите, что если сумма трёх целых чисел делится на 6, то и сумма их кубов тоже делится на 6.

**13** Докажите, что среди квадратов любых пяти натуральных чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 10.

**14** Решите сравнения (т. е. найдите все остатки, какие может давать $x$ при делении на число, по модулю которого верно «равенство»):

a $5x\equiv 1 \pmod 7$; b $2x\equiv 6 \pmod{15}$; c $3x\equiv 18 \pmod{15}$; d $4x\equiv 2 \pmod{10}$.

**15** Числа $p$, $8p^2+1$ — простые. Найдите $p$.

**16** Найдите (с помощью алгоритма Евклида) НОД

a 216 и 144; b 4669 и 1798; c $\underbrace{11\ldots11}_{\text{35 единиц}}$, $\underbrace{11\ldots11}_{\text{20 единиц}}$; d $2^{32}+1$, $2^{16}+1$.

**17** Докажите равенства (для ненулевых целых $a$, $b$, $c$):

a $(a,(b,c))=(a,b,c)$; b $[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]\cdot(a,b,c)=abc\cdot[a,b,c]$.

**18** Докажите, что НОД двух соседних чисел Фибоначчи равен 1.

**19** Решите в целых числах уравнения:

a $3x+5y=1$;  b $15x+43y=3$.

**20** У числа $n$ сто делителей. Найдите их произведение. (Ответ выразите через $n$.)

**21** Существует ли натуральное число, которое при умножении на 2 станет квадратом, при умножении на 3 — кубом, а при умножении на 5 — пятой степенью?

**22** Найдите остаток от деления

a $8^{11}$ на 11;  b $3^{123}$ на 11;  c $3^{2012}$ на 43;  d $5^{111}+6^{111}$ на 13;  e $3^{10^{100}}$ на 17.

**23** Какой остаток при делении на простое $p$ даёт сумма

$$1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+\cdots+(p-1)^{p-1}?$$

**24** Решите системы сравнений:

a $\begin{cases} x\equiv 3 \pmod 6 \\ x\equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$  b $\begin{cases} x\equiv 3 \pmod 5 \\ x\equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$  c $\begin{cases} x\equiv 2 \pmod 4 \\ x\equiv 7 \pmod 9 \\ x\equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$

**25** Сколько остатков могут давать квадраты натуральных чисел при делении на $3\cdot 5\cdot 8$?

**26** Докажите, что для любых множеств $A$, $B$ и $C$

a $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;  b $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

**27** Объединение четырех множеств, каждое из которых состоит из 40 элементов, содержит не более 100 элементов. Докажите, что пересечение каких-то двух из этих множеств состоит, по крайней мере, из 10 элементов.

**28** Пусть множество $A$ содержит $n$ элементов. Сколько существует

a отношений на $A$;  b рефлексивных отношений на $A$;

c иррефлексивных отношений на $A$;  d симметричных отношений на $A$;

e антисимметричных отношений на $A$?

**29** a Случайным образом выбирается натуральное число от 1 до 105 (все числа равновероятны). Независимы ли события «выбранное число делится на 5» и «выбранное число делится на 7»?

b А если число выбирается из промежутка от 1 до 100?

**30** Известно, что в семье двое детей. Какова вероятность того, что в семье два мальчика, если известно, что один из детей:

a мальчик;  b мальчик, родившийся в понедельник?

**31** Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 95% яиц из первого хозяйства и 20% яиц из второго хозяйства — яйца высшей категории. Всего высшую категорию получает 65% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

**32** В отделении банка стоят три одинаковых банкомата. Каждый из них может быть неисправен независимо от других с вероятностью 0,07. Найдите вероятность того, что:

a хотя бы один банкомат исправен;  b ровно два банкомата исправны.

**33** В ящике имеется 10 белых и 15 чёрных шаров. Из ящика вынимаются 4 шара. Найдите вероятность того, что

a все вынутые шары будут белыми;  b будут вынуты три белых и один чёрный шар.

**34** В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую другую. Докажите, что можно так выбрать две станции и закрыть их на ремонт (запретив проезжать через них), что по-прежнему можно будет с любой оставшейся станции проехать на любую другую. (Станций в метро не меньше трёх.)

**35** Семён пригласил на день рождения 20 своих знакомых. Оказалось, что в каком бы порядке гости ни приходили на праздник, каждый новый пришедший будет знать не менее половины уже присутствующих (включая Семёна). Какое наименьшее количество пар знакомых людей может быть среди приглашённых?

**36** В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество листов больше половины общего количества вершин.

**37** Наибольшая степень вершины в дереве равна $d$. Докажите, что в нём есть хотя бы $d$ листов.

**38** У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

**39** 20 школьников решили 20 задач. Каждый решил по 2 задачи, и каждую задачу решило 2 человека. Докажите, что можно попросить каждого школьника рассказать одну из решенных им задач так, чтобы все задачи были рассказаны.

**40** Докажите, что связный граф можно обойти, проходя по каждому ребру дважды.

**41** Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата $4 \times 4$, представить в виде объединения [a] пяти ломаных длины 8; [b] восьми ломаных длины 5?

**42** Найдите с помощью алгоритма Евклида
[a] НОД$(x^2+1,\, x^6+1)$; [b] НОД$(x^6-1, x^{15}-1)$;
[c] НОД$(x^4-x^3+3x^2-x+6,\, x^4+6x^2+3x+10)$.

**43** Многочлен $P(x)$ дает остаток 15 при делении на $x-1$ и остаток 43 при делении на $x-2$. Какой остаток дает этот многочлен при делении на $x^2-3x+2$?