

**21 апреля 2023**  
*Графы. Разнобой.*

*Задачи этого листка можно решать в любом порядке. При их решении можно пользоваться всеми фактами, доказанными на уроках и в предыдущих листках.*

Подсчёт рёбер и вершин

**1** На конгресс съехались физики и лирики. Каждый физик знаком с 5 физиками и 10 лириками, а каждый лирик — с 9 физиками и 6 лириками.

**a** Кого больше, физиков или лириков, и во сколько раз?

**b** Какое минимальное число ученых могло быть на этом конгрессе?

**2** Телефонная компания ввела льготный тариф для школьников, позволяющий каждому школьнику выбрать 10 человек, которым он может звонить бесплатно. Какое наибольшее количество школьников можно подключить к этому тарифу так, чтобы среди каждых двух школьников один мог бесплатно звонить другому?

Деревья

**3** В пруд пустили 300 щук, которые постепенно поедают друг друга. Щука считается сытой, если она съела не менее трёх щук (сытых или голодных). Какое наибольшее число щук может насытиться?

**4** В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество листов больше половины общего количества вершин.

Двудольные графы

**5** В школьной столовой продается первое, второе и десерт. Обслуживая учеников 8 «В», повар заметил, что каждый из них взял либо 1, либо все 3 блюда, а каждое блюдо взяло нечётное число учеников. Докажите, что кто-то из 24 учеников 8«В» вообще не пообедал.

**6** Написаны все 1000 цифр числа. Докажите, что можем да их раскрасим в два цвета так, что отношение между числами от одинаковых цветов да не является простым числом.

Эйлеровость

**7** На плоскости нарисованы несколько окружностей, образующие связную фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

**8** Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата  $4 \times 4$ , представить в виде объединения **a** пяти ломаных длины 8; **b** восьми ломаных длины 5?