

4 апреля 2023

Графы: продолжение. Двудольные графы.

Дало две доли провидение
На выбор мудрости людской:
Или надежду и волнение,
Иль безнадежность и покой.

Е. А. Баратынский

Двудольный граф — это такой граф, в котором можно поделить вершины на две доли так, что между вершинами из одной доли нет рёбер (или, иначе, раскрасить в два цвета так, чтобы концы любого ребра были разного цвета).

- 1 Проверьте, двудольны ли:
 а) простой чётный цикл; б) простой нечётный цикл; в) дерево.
- 2 Докажите, что в двудольном графе совпадают суммы степеней вершин каждого цвета.

Полным двудольным графом называется двудольный граф, в котором проведены все возможные рёбра (т. е. все рёбра, соединяющие вершины из разных долей).

- 3 Сколько может быть рёбер в полном двудольном графе на 6, 7, 8 вершинах?
- 4 Каково максимальное число рёбер в двудольном графе на а) $2n$ б) $2n + 1$ вершинах?

Как выяснить, двудольный ли ваш граф? Оказывается, есть простой критерий: граф двудольен тогда и только тогда, когда в нём нет нечётных циклов (см. задачу 1).

- 5 В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько там девочек, и сколько мальчиков, если всего учеников 24?
- 6 а) На некоторых клетках шахматной доски стоят кони. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы кони одинакового цвета друг друга не били.
 б) Можно ли поставить на бесконечную клетчатую доску 25 коней так, чтобы каждый бил ровно 4 других?

7 У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

8 20 школьников решили 20 задач. Каждый решил по 2 задачи, и каждую задачу решило 2 человека. Докажите, что можно попросить каждого школьника рассказать одну из решенных им задач так, чтобы все задачи были рассказаны.