

28 марта 2023
Графы. Вспомнить всё.

Вставайте, граф, Вас ждут великие дела.

Напомню, графом называется набор объектов (вершин), некоторые из которых связаны каким-то отношением (ребром). Несколько важных фактов о графах, которые вы можете помнить:

- *Связный граф* — такой, в котором между любыми двумя вершинами существует путь по рёбрам. Любой граф распадается на *компоненты связности*.
- *Степенью вершины* называется число выходящих из неё рёбер.

Лемма о рукопожатиях говорит, что сумма степеней всех вершин графа всегда чётна. Или, что то же самое, что в графе всегда чётное число вершин с нечётными степенями.

- *Деревом* называется связный граф без циклов. Эквивалентное (почему?) определение — связный граф, между двумя любыми вершинами которого есть ровно один простой (без повторений) путь. В любом дереве больше чем с одной вершиной есть хотя бы две вершины степени 1 (они называются *висячими вершинами* или *листами*).

Теорема об остовном дереве говорит, что в любом графе можно удалить некоторое количество рёбер так, чтобы получилось дерево.

1 Докажите, что принадлежность одной компоненте связности есть отношение эквивалентности.

2 Граф, в котором проведены все возможные рёбра, называется *полным*. Сколько рёбер в полном графе с n вершинами?

3 Докажите, что в группе из 7 человек есть двое с одинаковым числом знакомых в этой группе.

4 У графа пять вершин имеют степень 5, шесть вершин — степень 6, семь вершин — степень 7. Сколько рёбер в этом графе?

5 В неизвестной стране из города Столичный выходит 21 дорога, а из города Дальний — ровно одна. Из остальных городов выходит по 20 дорог. Докажите, что из города Дальний можно попасть в Столичный.

6 В связном графе степени всех вершин чётны. Одно ребро стёрли. Докажите, что граф остался связным.

7 а Каково наибольшее количество листьев в дереве с n вершинами?

б В дереве с n вершинами подсчитали пути между каждыми двумя вершинами. Сколько получилось путей?

в Сколько рёбер в дереве с n вершинами?

8 Максим написал на доске степени всех вершин некоторого дерева. Лёша и Лена, руководствуясь этим, нарисовали два разных дерева. Каково минимальное количество чисел, написанных Максимом? Приведите какой-нибудь пример.

9 В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую другую. Докажите, что можно так выбрать две станции и закрыть их на ремонт (запретив проезжать через них), что по-прежнему можно будет с любой оставшейся станции проехать на любую другую. (Станций в метро не меньше трёх.)