21 марта 2023

Бинарные отношения. Продолжение.

> — Послушай, Зин, не трогай шурина:
> Какой ни есть, а он родня.
>
> *В. С. Высоцкий*

Если на множестве A задано отношение эквивалентности R (это, как вы помните, означает, что $R \subseteq A \times A$), то *классом эквивалентности* x по R называются все такие y, что $(x,y) \in R$ (то есть все вершины, в которые ведут стрелки из x). Это можно записать так: $[x]_R = \{y \in A | xRy\}$. Например, все числа, которые делятся на 3, образуют класс эквивалентности 0 ($[0]_3$) по отношению сравнимости по модулю 3.

$\boxed{\textbf{1}}$ Мы уже обсуждали свойства классов эквивалентности на примере сравнений по модулю, настало время чуть более строго их доказать. Докажите, что

$\boxed{\text{a}}$ $x \in [x]_R$; $\boxed{\text{b}}$ $(x,y) \in R \Rightarrow [x]_R = [y]_R$; $\boxed{\text{c}}$ если $(x,y) \notin R$, то $[x]_R$ и $[y]_R$ не пересекаются;
$\boxed{\text{d}}$ объединение всех классов эквивалентности равно множеству A.

$\boxed{\textbf{2}}$ Пусть множество M разбито на попарно непересекающиеся подмножества. Докажите, что отношение «принадлежать одному подмножеству» — отношение эквивалентности.

Пусть задано отношение $R \subseteq A \times B$ и отношение $Q \subseteq B \times C$. Композицией $R \circ Q$ называется $P \subseteq A \times C$, состоящее из пар (x,z), для которых найдётся y такой, что $(x,y) \in R$ и $(y,z) \in Q$. Например, композиция отношений «быть другом» и «быть родителем» даёт отношение «друг родителя»: им связаны друзья ваших родителей с вами.

$\boxed{\textbf{3}}$ Даны множества F (все женщины) и M (все мужчины), а также отношения P (родительство) и S (супружество). Как, используя эти 4 множества, операции декартова произведения, пересечения, объединения и композиции представить отношения:

$\boxed{\text{a}}$ «быть мамой»; $\boxed{\text{b}}$ «быть папой»; $\boxed{\text{c}}$ «быть бабушкой»; $\boxed{\text{d}}$ «быть дедушкой»;
$\boxed{\text{e}}$ «быть тёщей»; $\boxed{\text{f}}$ «быть свёкром»?

$\boxed{\textbf{4*}}$ Чего в предыдущей задаче не хватает для того, чтобы записать отношения «быть ребёнком» или «быть братом/сестрой» и производные от них?

$\boxed{\textbf{5}}$ Докажите, что $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. В каком случае выполняется равенство?

$\boxed{\textbf{6}}$ Пусть множество A содержит n элементов. Сколько элементов содержит $A \times A$?

$\boxed{\textbf{7}}$ Пусть множество A содержит n элементов. Сколько существует

$\boxed{\text{a}}$ отношений на A;
$\boxed{\text{b}}$ рефлексивных отношений на A;
$\boxed{\text{c}}$ иррефлексивных отношений на A;
$\boxed{\text{d}}$ симметричных отношений на A;
$\boxed{\text{e}}$ антисимметричных отношений на A?