

Декартово произведение множеств. Бинарные отношения и их свойства.

Так и царствует в мире любовь... Но притом (транзитивность — великая вещь)
Получается так, — словно ток по проводке проходит, — что любящий вас,
При условии том, что кого-то вы любите всею усталой душой,
Тоже любит любимого вами, а тот... В бесконечности провод исчез.

Д. Л. Быков

Пусть даны два (необязательно разных) множества X и Y . Декартовым произведением $X \times Y$ этих двух множеств называется множество упорядоченных пар (x, y) , где $x \in X$ и $y \in Y$. Упорядоченными такие пары называются потому, что для $x \neq y$ $(x, y) \neq (y, x)$: этим упорядоченная пара отличается от двухэлементного множества, в котором порядок элементов не играет роли. Например, координаты точки на плоскости — это упорядоченная пара: точки $A(1, 2)$ и $B(2, 1)$ разные, а совпадение точек при перестановке координат местами будет означать, что $x = y$.

Бинарным отношением R между множествами X и Y называется любое подмножество их декартова произведения. Если какая-то упорядоченная пара принадлежит этому отношению, это можно записать $(x, y) \in R$ или xRy (заметьте, это не то же самое, что $yRx!$).

1 а Пусть $|A| = m$ и $|B| = n$. Чему равно $|A \times B|$?

б Задайте какие-нибудь два множества (лучше с небольшим числом элементов) и перечислите все элементы их декартова произведения.

2 Приведите пример множеств A и B таких, что $A \times B \neq B \times A$.

3 Докажите, что

а $A = B$ и $C = D \Rightarrow A \times C = B \times D$;

б $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

В прошлый раз мы с вами начали обсуждать отношения эквивалентности. Так называются бинарные отношения на множестве $A \times A$, обладающие следующими свойствами:

- рефлексивностью ($\forall x \ xRx$);
- симметричностью ($\forall x, y \ xRy \Rightarrow yRx$);
- и транзитивностью ($\forall x, y, z \ xRy$ и $yRz \Rightarrow xRz$).

К первым двум свойствам есть антонимы: отношение называется *иррефлексивным*, если ему, напротив, не принадлежит ни одна пара вида (x, x) , и *антисимметричным*, если ему принадлежит не больше одной пары из (x, y) (y, x) (или, по-другому, если xRy и $yRx \Rightarrow x = y$).

4 а Аня сказала, что отношение R не симметрично, а Варя — что оно антисимметрично. Максим утверждает, что девочки сказали одно и то же. Прав ли он?

б Семён сказал, что отношение R не рефлексивно, а Артём — что оно иррефлексивно. Федя утверждает, что ребята сказали одно и то же. Прав ли он?

5 Какими свойствами обладают следующие отношения на множестве «люди \times люди»:

а родительство; б супружество; в соседство; г старшинство?

6 Какими свойствами обладают отношения $=, \neq, >, \leq$ на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

7 Является ли отношением эквивалентности:

а равенство треугольников; б подобие треугольников; в параллельность прямых?