8 «ВТ», задание на каникулы 19–26 февраля.

На последнем занятии мы с вами говорили о КТО (*китайской теореме об остатках*). Она говорит, что система сравнений

$$\begin{cases} \text{x} \equiv r_1 \pmod{a_1} \\ \text{x} \equiv r_2 \pmod{a_2} \\ \dots \\ \text{x} \equiv r_n \pmod{a_n} \end{cases}$$

имеет единственное решение по модулю $a_1 a_2 \dots a_n$ в случае, если все модули $a_1, a_2, \dots, a_n$ взаимно просты. Если они не взаимно просты, система может не иметь решений вовсе или иметь несколько.

Решая такую систему, можно как объединять в одно несколько сравнений по взаимно простым модулям (находя решение по модулю их произведения), так и разбивать сравнения, пользуясь тем, что если $x \equiv r \pmod{ab}$, то $x \equiv r \pmod{a}$ и $x \equiv r \pmod{b}$.

1 Решите системы сравнений:

a $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 6 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$ b $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$ c $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 4 \\ x \equiv 7 \pmod 9 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$

2 Сколько остатков могут давать квадраты натуральных чисел при делении на $3 \cdot 5 \cdot 8$?

3 Сколько существует натуральных чисел от 1 до $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, которые делятся на 2, 5, 11 и не делятся на 3, 7, 13?

4 Решите сравнение $n^2 + 3n + 1 \equiv 0 \pmod{55}$.

5 В некоторых целых точках числовой прямой сидят кузнечики. Каждый кузнечик может прыгать вправо и влево на определённое целое число (у каждого своё). Известно, что в каждой целой точке может побывать ровно один из кузнечиков. Докажите, что НОД чисел любых двух кузнечиков не равен 1.