

7 февраля 2023  
Разнойой. Комбинаторика.

При изучении наук примеры полезнее правил.

Исаак Ньютон

1 Делится ли число  $47^{30} + 39^{50}$  на 10?

2 У Максима есть доска  $10 \times 10$ . Сколько у него есть способов вырезать из неё прямоугольник по линиям сетки?

3 Может ли число  $n^4 + 2n^2 + 3$  быть простым (при  $n \geq 1$ )?

4 В зале стоят десять стульев в два ряда — по пять стульев в каждом, один ряд ровно за другим. В зал пришли десять человек различного роста. Сколькими способами можно рассадить их так, чтобы каждый человек, сидящий в первом ряду, был ниже человека, сидящего за ним?

5 а) Найдите какое-нибудь решение уравнения  $91x + 147y = (91, 147)$ ;

б) Найдите все решения уравнения  $91x + 147y = (91, 147)$ .

6 Сколько различных слагаемых останется, если раскрыть скобки и привести подобные в следующем выражении  $(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{30})^2 + (1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{30})^2$ ?

7 Сколькими способами 20 одинаковых шаров можно разложить в 4 разные корзины? (В корзину можно не класть ни одного шара.)

8 Пусть  $p$  — простое число.

а) Докажите, что  $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ .

б) Докажите по индукции, что для всякого натурального  $n$  справедливо  $n^p \equiv n \pmod{p}$ .

Что за теорему вы только что доказали?