

Жена Саймона всегда понимала самые мудрёные математические положения. А если попадался камень преткновения, муж терпеливо объяснял ей всё по нескольку раз. Поэтому у миссис Флэгг оставалось мало времени для прочих дел.

А. Порджес, «Саймон Флэгг и дьявол»

1 **a** В ряд стоит p стульев. У Полины есть a банок с разными красками. Сколькими способами она может раскрасить стулья?

b А Феде досталась карусель с p сиденьями, где p — простое число. У него тоже есть a банок с разными красками. Сколькими способами Федя может раскрасить карусель? (Способы, переходящие друг в друга при повороте карусели, считаются одинаковыми.)

2 Докажите, что $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ для простого p , если a не делится на p . (Указание: перемножьте все числа вида $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$. Какие остатки они дают при делении на p ?) Правда ли, что это утверждение эквивалентно $a^p \equiv a \pmod{p}$? Как это связано с задачей 1?

Если вы решили хотя бы одну из предыдущих задач, поздравляю: вы только что доказали *малую теорему Ферма*, названную по имени великого французского математика XVII века Пьера Ферма. С её помощью можно быстро находить остатки от деления на простые числа: чтобы найти остаток от деления a^b на p , достаточно рассмотреть a^k , где k — остаток от деления b на $p-1$.

3 Найдите остаток от деления

a 2^{16} на 17; **b** 8^{11} на 11; **c** 6^{25} на 13; **d** 3^{123} на 11; **e** 8^{900} на 29;
f 3^{2012} на 43; **g** $5^{111} + 6^{111}$ на 13; **h** $3^{10^{100}}$ на 17; **i** 2^{125} на 127.

4 Докажите, что если целое число a не кратно 17, то $a^8 - 1$ или $a^8 + 1$ кратно 17.

5 Какой остаток при делении на простое p даёт сумма

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1}?$$

6 Числа p и q — различные простые. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

Две задачи за вредность:

7 Существуют ли такие положительные числа a, b, c, x , что $c^2 = a^2 + b^2$ и $(c+x)^2 = (a+x)^2 + (b+x)^2$?

8 Дан выпуклый n -угольник, у которого никакие три диагонали не пересекаются в одной точке (мы не считаем вершины многоугольника за точки пересечения). Сколько точек пересечения диагоналей у этого многоугольника?