

24 января 2023
И ещё сравнения. Теорема Вильсона.

Математика — царица наук, а теория чисел —
царица математики.

Карл Фридрих Гаусс

1 Решите сравнения:

a $7x \equiv 3 \pmod{10}$;

b $5x \equiv 7 \pmod{12}$;

c $17x \equiv 5 \pmod{31}$;

d $4x \equiv 2 \pmod{14}$;

e $36x \equiv 15 \pmod{51}$;

f $334x \equiv 123 \pmod{1001}$.

Напомню, что если 1 делится на a по модулю n , говорят, что a обратимо по модулю n . Результат деления $1 : a \pmod{n}$ называется обратным к a по модулю n и обозначается a^{-1} .

Например, $4 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{7}$, значит, 4 обратимо по модулю 7, а его обратное равно 2.

2 Докажите, что у числа может быть только одно обратное.

3 Найдите обратные для чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 по модулю 9. Для каких из них вам не удастся этого сделать?

4 Решите сравнения $5x \equiv 0 \pmod{12}$, $3x \equiv 0 \pmod{12}$, $4x \equiv 0 \pmod{12}$. Какие ненулевые решения вам удалось найти в каждом случае? По всякому ли модулю u сравнения $ax \equiv 0 \pmod{n}$ ($a < n$) бывают ненулевые решения?

Число $a \neq 0$ называется делителем нуля в арифметике по модулю n , если существует отличное от нуля число b такое, что $ab \equiv 0 \pmod{n}$. Например, $4 \cdot 5 \equiv 0 \pmod{10}$, значит, 4 и 5 — делители нуля по модулю 10.

5 Найдите все делители нуля по модулю a 6 b 7 c 8 d 11 e 18.

6 Дано простое число p .

a Правда ли, что по модулю p у каждого числа есть обратное?

b Какие числа обратны сами себе по модулю p ?

c Докажите теорему Вильсона: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Наводка: разбейте все числа, меньшие p , на пары, руководствуясь пунктом a. Какие числа останутся без пары?

Две комбинаторные задачи для вредных детей, которые жалуются на теорию чисел:

7 На бесконечной клетчатой полоске сидит жук. Он хочет сделать $2n$ прыжков, каждый раз прыгая на соседнюю клетку, и вернуться в начальную клетку. Сколькими способами он может это сделать?

8 $(a+b)^n$ разложили по формуле бинома Ньютона. Второе слагаемое оказалось равно 240, третье — 720, а четвёртое — 1080. Найдите x , y и n .