11 ноября 2022

Формула Пика.

Нет царского пути в геометрии.

Евклид

Формула Пика: площадь многоугольника с вершинами в *узлах сетки* (т. е. в точках с целыми координатами) равна В+Г/2−1, где В — число узлов сетки, попавших внутрь многоугольника, а Г — число узлов сетки на его границах (включая вершины).

Напомню, на уроке мы доказали следующее:

- *если формула Пика верна для двух многоугольников, то она верна и для многоугольника, составленного из них;*
- *любой многоугольник можно триангулировать — разрезать диагоналями на треугольники;*
- *любой многоугольник на сетке можно разрезать на элементарные треугольники — т. е. такие, которые не содержат целых точек ни внутри, ни на границах вне вершин.*

Теперь осталось проверить, что площадь у любого элементарного треугольника одна и та же, а именно $1/2$.

1 Нарисуйте элементарный треугольник, все стороны которого больше пяти. Найдите его площадь.

2 Докажите, что

a элементарный треугольник не может быть остроугольным;

b если элементарный треугольник прямоугольный, то он *минимальный* (т. е. все три его вершины попали в вершины какой-то одной клетки).

3 Назовём *прыжком* следующее преобразование элементарного треугольника: одна из вершин переходит в точку, симметричную ей относительно другой вершины. Докажите, что

a прыжок сохраняет площадь;

b прыжок относительно вершины тупого угла оставляет трегольник элементарным;

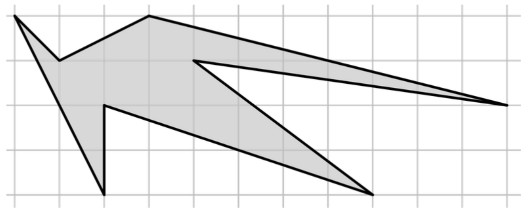
c такой прыжок уменьшает периметр;

d периметр простого треугольника не может уменьшаться бесконечно;

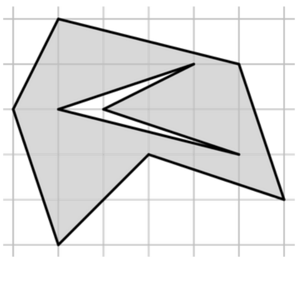
e прыжками мы можем любой элементарный треугольник превратить в минимальный.

Правда ли, что это победа? Почему?

4 А теперь просто посчитайте площади серых областей:



a



b