

**21 октября 2022**  
*Основная теорема арифметики.*

То, что принято без доказательств,  
может быть отвергнуто без доказательств.

*Евклид*

Соотношение Безу. Если  $(a,b) = 1$ , то  $\exists x, y: ax + by = 1$ .

Лемма Евклида. Если  $p$  простое и  $ab:p$ , то  $a:p$  или  $b:p$ .

Основная теорема арифметики. Любое натуральное число, большее единицы, раскладывается в произведение простых множителей единственным (с точностью до порядка следования множителей) образом.

**1** При каком наименьшем натуральном  $n!$  делится на 2600000?

**2** Натуральное число  $n$  назовём *хорошим*, если после приписывания его справа к любому натуральному  $n$  получается число, делящееся на  $n$ . Запишите все хорошие числа, меньшие 100.

**3** Сколько разных натуральных делителей у чисел

**a** 43      **b** 15      **c** 30      **d** 32      **e** 64      **f** 360      **g** 645?

**4** У числа  $n$  сто делителей. Найдите их произведение. (Ответ выразите через  $n$ .)

**5** Может ли у числа быть нечётное число делителей? Если да, при каком условии?

**6** Сколько разных натуральных делителей у чисел

**a**  $2^n$       **b**  $10^n$       **c**  $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$ , где  $p_1 \dots p_k$  — различные простые числа?

**7** Существует ли натуральное число, которое при умножении на 2 станет квадратом, при умножении на 3 — кубом, а при умножении на 5 — пятой степенью?

**8** Докажите, что уравнение  $x^2 = ny^2$  не имеет натуральных решений, если  $n$  не квадрат натурального числа.