8 «ВТ». Домашнее задание на 21 октября.

Напоминание. *Алгоритм Евклида* — это способ находить НОД a и b. На каждом шаге мы заменяем пару (a,b) (где $a > b$) на пару (b,r), где r — остаток от деления a на b, и действуем так, пока не получим пару $(r_n,0)$: именно r_n и будет НОДом a и b. Это можно записать так:

$a = bq_1 + r_1$, $0 < r_1 < |b|$ (делим a на b с остатком)

$b = r_1q_2 + r_2$, $0 < r_2 < r_1$ (делим b на r_1 с остатком)

$r_1 = r_2q_3 + r_3$, $0 < r_3 < r_2$ (делим r_1 на r_2 с остатком)

...

$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$, $0 < r_n < r_{n-1}$ (делим r_{n-2} на r_{n-1} с остатком)

$r_{n-1} = r_nq_{n+1}$ (r_{n-1} разделилось на r_n нацело, r_n и есть искомый НОД)

Тогда получается, что $r_1 = a - bq_1$ (первое равенство).

Аналогично $r_2 = b - r_1q_2 = b - q_2(a - bq_1) = -q_2a + b(1 + q_1q_2)$, $r_3 = r_1 - r_2q_3 = \ldots$, т. е. каждый из получающихся остатков представляется в виде суммы $ax + by$, в том числе и последний, равный (a,b).

Можно идти и в другую сторону (потому и говорят про «обратный алгоритм Евклида»): начать с $r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$, а r_{n-1}, в свою очередь, выразить через r_{n-2} и r_{n-3} и так далее.

Важное следствие из этой процедуры — *соотношение Безу*: если $(a,b) = 1$, то $\exists\ x,\ y$: $ax + by = 1$. Очевидно, что, найдя такие коэффициенты, мы можем получить справа любое целое число n, просто домножив на него обе части.

1 Докажите, что (a,b) — наименьшее положительное число, представимое в виде $ax + by$.

2 Примените обратный алгоритм Евклида к числам

a) 15 и 43 b) 19 и 69 c) 44 и 605 d) 231 и 525

3 Решите в целых числах уравнения:

a) $(2x + y)(5x + 3y) = 7$

b) $x^2 - y^2 = 55$

c) $xy + x + y = 7$

d) $2x^3 + xy - 7 = 0$

e) $3x + 5y = 1$

f) $15x + 43y = 3$