8 «ВТ». Спецкурс. Занятие 1.

6 сентября 2022

Индукция-1.

— Взгляни на этого математика, — сказал логик. — Он замечает, что первые девяносто девять чисел меньше сотни, и отсюда с помощью того, что он называет индукцией, заключает, что любые числа меньше сотни.
— Физик верит, — сказал математик, — что 60 делится на все числа. Он замечает, что 60 делится на 1, 2, 3, 4, 5 и 6, и проверяет ещё несколько чисел, например, 10, 20 и 30, взятых, как он говорит, наугад. Так как 60 делится на них, он считает экспериментальные данные достаточными.
— Да, но взгляни на инженера, — возразил физик. — Он подозревает, что все нечётные числа простые. Во всяком случае, 1 можно рассматривать как простое. Затем идут 3, 5 и 7, все, несомненно, простые. Затем идет 9 — досадный случай, но 11 и 13, конечно, простые. Возвратимся к 9, — говорит он, — я заключаю, что 9 должно быть ошибкой эксперимента.

-1 Плоскость разрезана n прямыми на несколько частей. Докажите, что эти части можно раскрасить в чёрный и белый цвета таким образом, чтобы любые две части, имеющие общий кусок границы, были раскрашены в разные цвета.

0 Докажите, что при любом натуральном n число $1111\ldots11$ (3^n) делится на 3^n.

1 Из квадрата клетчатой бумаги размером $2^n \times 2^n$ вырезали одну угловую клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

2 Последовательность $\{a_n\}$ задана правилом: $a_1 = 1$, а каждый член, начиная со второго, вычисляется по формуле $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Докажите, что $a_n = 2^n - 1$.

3 Торт в форме выпуклого многоугольника разрезали ножом по некоторым диагоналям на части (диагонали могут пересекаться). Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдётся хотя бы один чистый кусок.

4 Докажите, что:

a $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

b $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

c $1^2+2^2+3^2...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d $1^3+2^3+3^3...+n^3 = (1+2+...+n)^2$

(В пунктах a и b попробуйте придумать не только индуктивное, но и геометрическое доказательство.)

5 В Математическом городе $n \geqslant 2$ площадей. Любые две площади соединены напрямую либо автодорогой, либо велодорожкой. Докажите, что или от любой площади до любой другой можно проехать на автомобиле, или от любой площади до любой другой можно добраться на велосипеде.

6 Для каждого натурального числа от $n+1$ до $2n$ включительно выберем наибольший нечётный делитель и сложим все эти делители. Чему будет равна полученная сумма?

7 На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три из которых не пересекаются в одной точке? (Это называется «прямые общего положения»).

8 В пространстве отмечены 100 точек, любые две из которых соединены ровно одной стрелкой. Докажите, что можно поменять направление не более чем одной стрелки так, чтобы из любой точки можно было добраться по стрелкам до любой другой.