

Примеры задач, которые могут встретиться на зачёте.

- 1 Дан треугольник ABC . Максим нарисовал синим цветом три ГМТ, заданных равенствами

$$AX^2 - BX^2 = 1, AX^2 - BX^2 = 2, AX^2 - BX^2 = 3$$

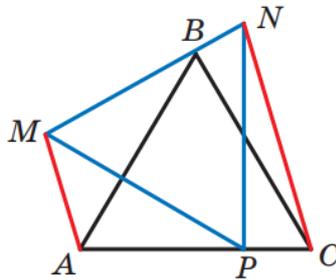
Лёша нарисовал красным цветом три других ГМТ, заданных равенствами

$$CX^2 - BX^2 = 1, CX^2 - BX^2 = 2, CX^2 - BX^2 = 3$$

Лена нашла точки пересечения ГМТ Максима и ГМТ Лёши (то есть точки, покрашенные и синим, и красным цветом) и спроецировала полученные точки на прямую AC . Сколько различных точек на прямой AC она получила?

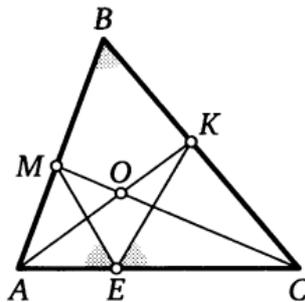
- 2 Лемма о трёх хордах: даны три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что три их общие хорды пересекаются в одной точке.

- 3 Треугольники MNP и ABC равносторонние. Докажите, что $AM \parallel CN$.



- 4 В треугольнике ABC провели высоту BH . Точки D и E — проекции точки H на стороны AB и BC . Докажите, что точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

- 5 $\angle MEA = \angle KEC = \angle B$. Докажите, что $ВМОК$ вписан.



- 6 Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно, а биссектриса $\angle BAC$ пересекает отрезок KL в точке P . Докажите, что $\angle APC = 90^\circ$.

- 7 В треугольнике провели две высоты. Их продолжения пересекают его описанную окружность в двух точках. Докажите, что эти точки равноудалены от третьей вершины треугольника.

- 8 В остроугольном треугольнике ABC AH — высота, а O — центр описанной окружности. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

- 9 В треугольнике ABC H — ортоцентр, O — центр описанной окружности, а L — проекция O на AC . Докажите, что OL вдвое короче BH (не забудьте рассмотреть неостроугольный случай).

- 10 Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что её отражения относительно прямых, содержащих стороны треугольника ABC , лежат на одной прямой.