

8 «ВТ», задачи для подготовки к зачёту.

1 Внутри треугольника ABC отмечена точка X . Через неё проведены чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 . Известно, что $AX : XA_1 = 1 : 1$, $BX : XB_1 = 2 : 1$. Вычислите следующие отношения:

- а) $BC_1 : C_1A$; б) $BA_1 : A_1C$; в) $C_1X : XC$.

2 На продолжении стороны CD параллелограмма $ABCD$ за точку C выбрана точка P . Прямая AP пересекает сторону BC в точке Q . Докажите, что точка Q делит отрезок BC в таком же отношении, как и точка C делит отрезок DP .

3 Может ли центр вписанной окружности лежать на средней линии треугольника?

4 На основании AD трапеции $ABCD$ нашлись различные точки P и Q такие, что каждый из отрезков BP и CQ делит площадь трапеции пополам. Известно, что площадь четырёхугольника $BSPQ$ в три раза меньше площади трапеции $ABCD$. Найдите отношение $AD : BC$.

5 Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон. Докажите, что этот четырёхугольник — трапеция или параллелограмм.

6 Треугольник с вершинами в целых точках не имеет ни одной целой точки на границах и только одну — внутри. Докажите, что это точка пересечения медиан треугольника.

7 а) Биссектриса внешнего угла A треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC в точке M . Докажите, что $BM : MC = AB : AC$.

б) В неравностороннем треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1 . Кроме того, провели биссектрису внешнего угла при вершине A , которая пересекла прямую BC в точке A_1 . Докажите, что A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

8 В углы квадрата вписаны одинаковые квадраты площади 13, как показано на рисунке. Найдите площадь тёмно-серого четырёхугольника.

