8 «ВТ», домашнее задание на 3 декабря.

Напомню, на уроке мы обсуждали теорему Чевы, названную в честь итальянского инженера и математика Джованни Чевы (1647–1734). Она гласит, что, если три чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то верно равенство

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$$

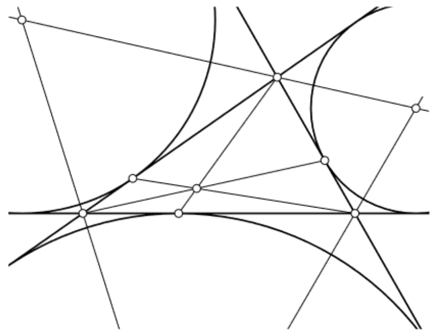
Верно и обратное: если для точек A_1, B_1 и C_1 на сторонах треугольника справедливо приведённое выше равенство, то проведённые к ним чевианы пересекаются в одной точке.

$\boxed{1}$ Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Точки A_1, B_1 и C_1 отразили относительно середин сторон BC, CA и AB соответственно и получили точки A_2, B_2 и C_2. Докажите, что AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке. (Такое преобразование называется *изотомическим сопряжением*, а точка пересечения AA_2, BB_2 и CC_2 — *изотомически сопряжённой* точке P.)

$\boxed{2}$ В треугольнике ABC чевианы AD, BE и CF пересекаются в точке P. Известно, что DE — биссектриса угла ADC. Докажите, что DF — биссектриса угла ADB.

$\boxed{3}$ Дан треугольник ABC. $A_1 \in BC$ — точка касания вневписанной окружности с центром I_A, $B_1 \in AC$ — точка касания вневписанной окружности с центром I_B, $C_1 \in AB$ — точка касания вневписанной окружности с центром I_C (см. картинку). Докажите, что чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке — она называется *точкой Нагеля* в честь немецкого учителя и математика Христиана Генриха фон Нагеля (1803–1882) и традиционно обозначается буквой N.

Подсказка: попробуйте выразить нужные отрезки через полупериметр и длины сторон, подобно тому, как мы это делали с точкой Жергонна.



$\boxed{4}$ В треугольнике ABC проведена биссектриса BD и перпендикуляр IH из инцентра I (*ладно, центра вписанной окружности, но вообще к словам привыкайте*) на сторону AC. Докажите, что $\angle CID = \angle AIH$.

$\boxed{5}$ (См. картинку.) Докажите, что площади параллелограммов равны.