# 8ВМ, спецкурс, занятие 8
## 20 октября 2023
# *Задачи про НОД и НОК*

**Задача 1.** Пусть $\frac{m}{n}$ - положительная несократимая дробь, и известно, что дробь $\frac{4m+3n}{5m+2n}$ сократима. На какие натуральные числа она сократима?

**Решение.** Ищем НОД числителя и знаменателя. $(4m+3n, 5m+2n) = (4m+3n, m-n) = (7n, m-n) = (7, m-n)$. Последнее равенство следует из того, что $(n, m-n) = 1$. Итак, дробь может быть сократима только на 7.

**Задача 2.** Натуральные числа $a$ и $b$ таковы, что $a\cdot$НОД$(a, b) + b\cdot$НОК$(a, b) < 2{,}5ab$. Докажите, что $a$ делится на $b$.

**Решение.** Пусть $(a, b) = d$. Тогда $a = du, b = dv$, причем $(u, v) = 1$, и НОК$(a, b) = duv$. Неравенство принимает вид

$$d^2u + d^2uv^2 < 2{,}5d^2uv$$

$$1 + v^2 < 2{,}5v$$

Если $v \geq 2$, то это неравенство не выполняется (можно доказать например по индукции). Значит, $v = 1$, $b = d$, $a = ub$, что и требовалось доказать.

**Задача 3.** Сколько существует таких пар натуральных $m, n$, что НОД$(m, n) = 2023!$, а НОК$(m, n) = 2024!$.

**Решение.** $m = a \cdot 2023!$, $n = b \cdot 2023!$, причем $(a, b) = 1$ и $ab = 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Каждый из множителей 8, 11, 23 целиком относится либо к $a$, либо к $b$. Поэтому вариантов всего 8.

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ Маша ходит кататься на коньках каждый третий день, а Вася ходит играть в кёрлинг каждый пятый. Ребята ссорятся, если не могут определиться куда им пойти. Но по воскресеньям Маша готова уступить Васе и поиграть с ним в кёрлинг. Сколько раз в 2023 году поссорятся Маша с Васей, если 1 января (воскресенье) они договорились пойти играть в кёрлинг?

$\boxed{\mathbf{2}}$ На Нептуне в сутках 2023 часа, и циферблат нептунианских часов разделен на 2023 равных деления. Хулиган Ръх в 00:00 покрасил в сиреневый цвет начальное деление, а потом решил через каждые $\boxed{\text{a}}$ 1543 часа; $\boxed{\text{b}}$ 340 часов красить в сиреневый цвет деление, на которое в этот момент указывает часовая стрелка. Сколько делений в итоге будет покрашено?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Наибольший общий делитель целых чисел $m$ и $n$ равен 1. Каково наибольшее возможное значение НОД$(m + 2000n, n + 2000m)$?

$\boxed{\mathbf{4}^{\vee}}$ Среди чисел, превышающих 2023, найдите наименьшее нечётное число $N$, при котором дробь $\frac{13N-10}{19N-9}$ сократима.

$\boxed{\mathbf{5}^{\vee}}$ Найдите все такие натуральные числа $a$ и $b$, что НОК$(a, b) =$ НОД$(a, b) + 19$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Натуральные числа $m$ и $n$ таковы, что НОК$(m, n)+$ НОД$(m, n) = m + n$. Докажите, что одно из чисел $m$ или $n$ делится на другое.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Найдите все натуральные $a$ и $b$ такие, что НОК$(a, b)-$ НОД$(a, b) = \frac{ab}{5}$.

$\boxed{\mathbf{8}^{\veebar}}$ Произведение двух натуральных чисел равно 600. Найдите наибольшее возможное значение их НОДа.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Натуральные числа $a$, $b$ и $c$ таковы, что НОК$(a,\,b)=60$ и НОК $(a,\,c)=270$. Чему может быть равен НОК$(b,\,c)$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Учитель записал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашёл их наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: $1, 2, 3, 4, 5$ и $N$, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число $N$?

$\boxed{\mathbf{11}^{\bigstar}}$ Найдите все тройки натуральных чисел $(a,\,b,\,c)$ таких, что $\left(a^2,\,b^2\right)+(a,\,bc)+(b,\,ac)+(c,\,ab)=239^2=ab+c$