# 8ВМ, спецкурс, занятие 6
## 6 октября 2023
# *Линейные диофантовы уравнения*

**Определение.** Уравнение называется *диофантовым*, если требуется искать его целые (или натуральные) решения.

**Определение.** Пусть $a, b, c$ – целые числа. Уравнение $ax+by=c$, у которого необходимо искать целые решения $(x, y)$, называется *линейным диофантовым уравнением с двумя переменными.*

Алгоритм решения уравнения $ax+by=c$:

1. Если $c$ не делится на НОД$(a, b)$, то уравнение решений не имеет.

2. Пусть $c$ делится на НОД$(a, b)$. Тогда можно сократить все уравнение на этот НОД.

3. Дальше будем считать, что НОД$(a, b)=1$. Пользуясь обратным алгоритмом Евклида можно найти какие-то такие $t$, $s$, что $at+bs=1$.

4. Умножим это соотношение на $c$, получим $a(ct)+b(cs)=c$. Тогда $x_0=ct$, $y_0=cs$ – какое-то *частное* решение нашего уравнения $ax+by=c$.

   Вместо шагов 3 и 4, частное решение можно было найти каким-то другим способом. Довольно часто его можно угадать. Или можно выразить $c$ через остатки, полученные в середине обратного алгоритма Евклида. Если $c$ большое, то можно поделить его с остатком на $a$ (или $b$), выразить этот остаток, а потом добавить нужное количество $a$.

5. Итак, мы нашли такие $x_0, y_0$, что $ax_0+by_0=c$. Вычитая это тождество из уравнения $ax+by=c$, получаем $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. Первое слагаемое делится на $a$, значит и второе тоже. Поскольку $(a, b)=1$, то $(y-y_0) \vdots a$. Значит, $y-y_0=ak$, где $k$ – произвольное целое число. Тогда $x-x_0=-bk$ (где $k$ то же самое).

6. Итак, все решения нашего линейного диофантова уравнения $ax+by=c$ (с взаимно простыми $a, b$) имеют вид $x=x_0-bk$, $y=y_0+ak$, где $k$ – произвольное целое число. Этих решений бесконечно много.

7. Если нам нужны неотрицательные решения нашего уравнения, то нужно отобрать такие целые $k$, для которых $x_0-bk \geq 0$ и $y_0+ak \geq 0$. Этих решений будет уже конечное число.

$\boxed{\textbf{0}}$ Имеются контейнеры весом 130 кг и 160 кг. Нужно полностью загрузить ими фуру грузоподъемностью 7 тонн. Сколько есть способов это сделать?

**1**$^{\vee}_{-}$ Решите уравнения в целых числах:

a $3x+5y=1$;

b $525x+231y=43$;

c $15x+43y=3$;

d $162x+46y=2000$.

**2**$^{\vee}_{-}$ В бесконечной колоде сколько угодно тузов и королей. Как известно, при игре в «Очко» туз оценивается в 11 очков, а король — в 4. Сколькими способами можно набрать ровно 121 очко одними тузами и королями? Какой из этих способов достигается наименьшим количеством карт? А наибольшим?

**3**$^{\vee}_{-}$ На складе 3003 шкафа. Розовый шлюбзик умеет переносить 7 шкафов за раз, а лысый шпегльморгер — 20 шкафов за раз. Сколькими способами можно отрядить на склад отряд шлюбзиков и шпегльморгеров, чтобы они за раз вытащили со склада все шкафы, и каждый из них был загружен полностью?

**4** На площади стоят дяди и тети. У каждого дяди в кармане было 13 рублей, у каждой тети — 23 рубля. По площади прошел вор и незаметно украл все деньги. Какое наибольшее количество людей могло стоять на площади, если вор украл всего 1543 рубля?

**5** Остап Бендер организовал раздачу слонов населению. На раздачу явилось 11 членов профсоюза и 15 не-членов, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну не-членам (всем хотя бы по одному слону!). Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О.Бендера?

**6** Пусть при некотором $k$ от 1 до 960, уравнение $25x+36y=k$ имеет решение в натуральных числах. Докажите, что уравнение $25x+36y=961-k$ не имеет решений в натуральных числах.

**7** Найдите все целые решения системы $\begin{cases} 3x+5y-7z=1 \\ 4x+9y+11z=2 \end{cases}$.

**8** Найдите все решения уравнения $2x+3y+5z=13$ в целых числах.

**9** В лифте новейшей модели есть всего две кнопки: одна поднимает его на $a$ этажей, а другая спускает на $b$ этажей (здесь $(a,b)=1$). Найдите наименьшее количество этажей в доме, при котором можно доехать с любого этажа до любого другого.

**10**$^{\star}$ На первом шаге на концах отрезка написали две единицы. На втором шаге между ними записали их сумму – число 2. Дальше на каждом шаге между любыми двумя соседними числами на отрезке вписывают их сумму. Сколько раз после миллиона шагов будет записано число 1543? А число 2023?