8ВМ, спецкурс, занятие 5
29 сентября 2023
Прямой и обратный алгоритм Евклида.

Определение. *Разделить целое число a с остатком на целое число* $b \neq 0$ — это значит представить a в виде

$$a = bq + r, \text{ где } 0 \leq r < |b|.$$

Число q в этом случае называется *неполным частным*, а число r — *остатком.*

Определение. *Наибольшим общим делителем чисел* a *и* b (не равных нулю одновременно) называется наибольшее такое число c, что $a \vdots c$ и $b \vdots c$. (Обозначение НОД(a, b) или просто (a, b).)

Лемма. $(a, b) = (a-b, b) = (r, b)$, где r — остаток от деления a на b.

Доказательство. Пусть $d = (a, b)$ и $d_1 = (a-b, b)$. Поскольку $(a-b) \vdots d$, то d – какой-то (не обязательно наибольший) общий делитель $a-b$ и b. Значит, $d_1 \geq d$.

С другой стороны, d_1 является каким-то общим делителем $a = (a-b) + b$ и b, поэтому $d \geq d$. Это может быть, только если $d = d_1$.

Далее, пусть $a = kb + r$. Тогда $(a, b) = (a-b, b) = (a-2b, b) = \cdots = (a-kb, b) = (r, b)$, что и требовалось доказать. □

Алгоритм Евклида. Пусть $a \geq b$, и нам нужно найти (a, b). Заменим a на остаток от деления a на b. НОД от этого не изменится. Продолжим так делить большее с остатком на меньшее и заменять большее число на получившийся остаток. Когда одно из чисел уменьшится до нуля, другое станет равно (a, b).

1 На столе лежит клетчатая шоколадка 56×12. Каждую минуту от неё отламывают квадратик наибольшего возможного размера и кладут в тарелку. Какая сторона будет у самого маленького квадратика в тарелке?

2 При помощи алгоритма Евклида найдите a) $(372, 111)$; b) $(911, 119)$; c) $(11! - 20, 10! - 20)$.

3 При каких натуральных n дробь $\dfrac{29n + 11}{11n + 4}$ сократима?

4 Докажите по индукции, что два соседних числа Фибоначчи F_{n-1} и F_n взаимно просты.

5 Натуральное число n таково, что $(n, n+1) < (n, n+2) < \ldots < (n, n+35)$. Докажите, что $(n, n+35) < (n, n+36)$.

Обратный алгоритм Евклида. Запишем алгоритм Евклида для чисел a и b, причем деление с остатком будем писать в развернутом виде.

$$\begin{array}{rll}
a \text{ делим с остатком на } b: & a = q_1 b + r_1 & r_1 < |b| \\
b \text{ делим с остатком на } r_1: & b = q_2 r_1 + r_2 & r_2 < r_1 \\
r_1 \text{ делим с остатком на } r_2: & r_1 = q_3 r_2 + r_3 & r_3 < r_2 \\
 & \dots & \\
r_{n-1} \text{ делим с остатком на } r_n: & r_{n-1} = q_{n+1} r_n + r_{n+1} & r_{n+1} < r_n \\
r_n \text{ разделилось нацело на } r_{n+1}: & r_n = q_{n+2} r_{n+1} &
\end{array}$$

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \dots = (r_{n-1}, r_n) = (r_n, r_{n+1}) = (r_{n+1}, 0) = r_{n+1}$$

Остатки $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$ убывают, поэтому рано или поздно остаток станет нулевым и алгоритм закончит действие.

Теперь можно последовательно выражать остатки $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$ через a и b:

$$r_1 = a - q_1 b$$

$$r_2 = b - q_2 r_1 = b - q_2(a - q_1 b) = -q_2 a + (1 + q_1 q_2) b$$

$$r_3 = r_1 - q_3 r_2,$$

а r_1 и r_2 мы уже выразили через a и b. И так далее. В итоге получится, что

$$\text{НОД}(a, b) = r_{n+1} = xa + yb,$$

где x и y — какие-то целые числа.

Обратный алгоритм Евклида позволяет находить *линейное представление НОД*, то есть такие целые x и y, что $xa + yb = (a, b)$.

6 Кузнечик умеет прыгать вдоль прямой на 6 см и 10 см.

a Сможет ли он попасть в точку отстоящую от исходной на 7 см? А на 14 см?

b Опишите все точки, в которые он сможет попасть.

7$^{\veebar}$ Примените обратный алгоритм Евклида к числам

a 28 и 11; b 189 и 92; c 162 и 546.

8 Даны углы 32° и 25°. Как построить угол в 1°?

9 В кассе есть a-тугриковые монеты, а у покупателя b-тугриковые монеты. При каких a и b удастся заплатить 1 рубль?

10★ В классе химии имеются 25 пробирок объема 1, 2, . . . , 25 мл. Когда химики стали собираться в летний лагерь, оказалось, что у них осталось мало места, и они могут взять только набор из 10 пробирок. Химики хотят, чтобы с помощью любых двух пробирок из набора можно было отмерить 1 мл. Сколькими способами можно составить такой набор?

11★ На доске записаны два числа: 1543 и 2023. Аня и Олег играют в игру, Аня начинает. За один ход можно выписать на доску разность каких-нибудь двух чисел, записанных на доске (из большего вычитаем меньшее), если это число раньше не было выписано. Кто не может сделать ход – проигрывает. Кто победит при правильной игре.