

## 8В, спецкурс, занятие 4

22, 25 сентября 2023

### Принцип наименьшего элемента

*Принцип наименьшего элемента.* В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьшее число.

*Идея его применения.* Предположим, утверждение верно не при всех  $n$ . Рассмотрим наименьший  $N$  для которого оно не верно. А дальше докажем, что либо этот  $N$  на самом деле не наименьший, либо при этом  $N$  утверждение верно, и придем к противоречию.

*Большую часть задач можно решать и с помощью принципа математической индукции, и с помощью принципа наименьшего элемента. Но бывают задачи, где один из этих принципов явно удобнее другого.*

**0** Докажите, что не существует таких натуральных чисел  $x$  и  $y$ , что  $x^2 = 2y^2$ .

**1<sup>v</sup>** Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи не найдется двух последовательных чисел, делящихся на 7.

**2** Докажите, что любое натуральное число раскладывается на простые множители.

**3<sup>v</sup>** Докажите, что не существует таких натуральных  $x, y, z$ , что  $9x^3 + 3y^3 = z^3$ .

**4** Найдите ошибку в следующем рассуждении.

*Докажем, что все натуральные числа не меньше 1543. Предположим противное: существуют некоторые числа, которые меньше 1543. Пусть  $M$  — множество всех таких чисел, а  $n$  — наименьшее число в нем. Тогда  $n - 1 \notin M$ , а значит  $n - 1 \geq 1543$ . Но тогда  $n \geq 1544 > 1543$ , противоречие.*

**5** Применим ли принцип наименьшего элемента к множеству целых чисел? А к множеству неотрицательных действительных чисел?

**6<sup>★</sup>** **a** Выведите из принципа наименьшего элемента принцип индукции.

**b** Выведите из принципа индукции принцип наименьшего элемента.

#### И еще немного индукции

**7<sup>v</sup>** Число  $x$  таково, что  $x + \frac{1}{x}$  целое. Докажите по индукции, что  $x^n + \frac{1}{x^n}$  — тоже целое.

**8** Докажите по индукции *неравенство Бернулли*:  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  при  $a \geq -1$ . (Число  $a$  не обязательно целое.)

**9<sup>v</sup>** На какое максимальное число частей могут разбить плоскость  $n$  прямыми?

**10<sup>★</sup>** На какой максимальное число частей могут разбить пространство  $n$  плоскостей?

## 8В, спецкурс, занятие 4

22, 25 сентября 2023

### Принцип наименьшего элемента

*Принцип наименьшего элемента.* В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьшее число.

*Идея его применения.* Предположим, утверждение верно не при всех  $n$ . Рассмотрим наименьший  $N$  для которого оно не верно. А дальше докажем, что либо этот  $N$  на самом деле не наименьший, либо при этом  $N$  утверждение верно, и придем к противоречию.

*Большую часть задач можно решать и с помощью принципа математической индукции, и с помощью принципа наименьшего элемента. Но бывают задачи, где один из этих принципов явно удобнее другого.*

**0** Докажите, что не существует таких натуральных чисел  $x$  и  $y$ , что  $x^2 = 2y^2$ .

**1<sup>v</sup>** Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи не найдется двух последовательных чисел, делящихся на 7.

**2** Докажите, что любое натуральное число раскладывается на простые множители.

**3<sup>v</sup>** Докажите, что не существует таких натуральных  $x, y, z$ , что  $9x^3 + 3y^3 = z^3$ .

**4** Найдите ошибку в следующем рассуждении.

*Докажем, что все натуральные числа не меньше 1543. Предположим противное: существуют некоторые числа, которые меньше 1543. Пусть  $M$  — множество всех таких чисел, а  $n$  — наименьшее число в нем. Тогда  $n - 1 \notin M$ , а значит  $n - 1 \geq 1543$ . Но тогда  $n \geq 1544 > 1543$ , противоречие.*

**5** Применим ли принцип наименьшего элемента к множеству целых чисел? А к множеству неотрицательных действительных чисел?

**6<sup>★</sup>** **a** Выведите из принципа наименьшего элемента принцип индукции.

**b** Выведите из принципа индукции принцип наименьшего элемента.

#### И еще немного индукции

**7<sup>v</sup>** Число  $x$  таково, что  $x + \frac{1}{x}$  целое. Докажите по индукции, что  $x^n + \frac{1}{x^n}$  — тоже целое.

**8** Докажите по индукции *неравенство Бернулли*:  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  при  $a \geq -1$ . (Число  $a$  не обязательно целое.)

**9<sup>v</sup>** На какое максимальное число частей могут разбить плоскость  $n$  прямыми?

**10<sup>★</sup>** На какой максимальное число частей могут разбить пространство  $n$  плоскостей?