

8В, спецкурс, занятие $3\frac{1}{2}$

18 сентября 2023

Сложные задачи по индукции

1 а) Пусть n – нечетное число. Докажите, что n^{2^k} дает остаток 1 при делении на 2^{k+1} для любого натурального k .

б) Докажите, что для любого натурального k и любого нечетного m существует такое n , что $n^n - m$ делится на 2^k .

2 Колода карт 100 различных цветов разложена в один ряд. Если две карты одного цвета лежат рядом или через одну, то можно выбрасывать ту из них, которая левее. Кроме того, можно подкладывать справа любое количество карт из других колод. Доказать, что можно подкладывать и выбрасывать карты таким образом, чтобы в конце концов их осталось только 100.

3 $2n$ чисел смогли разбить на пары так, что произведение в каждой паре не является полным квадратом. Докажите, что это можно было сделать не меньше чем $n!$ способами.